



Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

**Clasificación de Cuerpos Compactos
Convexos Planos por sus
Sistemas de Fijación y sus
Sistemas de Detención**

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Hernán González Aguilar

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Vladimir Boltyanski

Enero 2007.

Guanajuato, Gto., México



Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

**Clasificación de Cuerpos Compactos
Convexos Planos por sus
Sistemas de Fijación y sus
Sistemas de Detención**

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Hernán González Aguilar

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Vladimir Boltyanski

Sinodales:

**Dr. Javier Bracho Carpizo, Dr. José Carlos Gómez Larrañaga,
Dr. Luis Montejano Peimbert, Dr. Jorge Urrutia Galicia**

Enero 2007.

Guanajuato, Gto., México

Se contó con una beca de CONACYT para los estudios
de posgrado con número de becario 124994

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. Sistemas de Fijación y Sistemas de Detención	3
1.1. Sistemas de Fijación	3
1.2. Sistemas de Detención	19
2. Nuevos Resultados: Sistemas de Fijación	31
2.1. Clasificación por Sistemas de Fijación	31
3. Nuevos Resultados: Sistemas de Detención	51
3.1. Clasificación por Sistemas de Detención	51
Bibliografía	63

La *teoría de conjuntos convexos* fue desarrollada principalmente por el famoso matemático alemán H. Minkowski. El introdujo e investigó los conceptos de *hiperplano soporte* de un conjunto convexo y su *envolvente afín*, la *función convexa*, la *suma* de conjuntos convexos (ahora llamada *suma de Minkowski*), los espacios vectoriales de dimensión finita con la bola unitaria convexa (ahora llamados *espacios de Minkowski*), los *volúmenes mixtos*, las propiedades de los *funcionales lineales* sobre un conjunto convexo, etc. Esto sucedió en la frontera de los siglos XIX y XX. Varios matemáticos (especialmente los que trabajaban en Análisis Clásico) caracterizaron su contribución en la geometría como un juguete matemático muy bonito y elegante, pero desafortunadamente inútil para las aplicaciones.

Aproximadamente un siglo ha pasado. Ahora la teoría geométrica de la convexidad es una de las herramientas importantes de las matemáticas aplicadas modernas. Los investigadores del análisis funcional, la economía matemática, la optimización, la teoría de juegos y muchas otras ramas de las matemáticas modernas, teóricas y aplicadas, usan ampliamente las nociones y los resultados de la teoría de conjuntos convexos. Ahora es natural que, antes de trabajar con las fórmulas, las integrales, las desigualdades, etc, es necesario representar un cuadro geométrico del problema que se está investigando.

La geometría combinatoria es una ciencia más joven que esta íntimamente relacionada con la teoría de conjuntos convexos. A pesar de la aparición en el siglo XIX de resultados particulares los cuales ahora tienen relación con la geometría combinatoria, los teoremas principales de esta rama de la geometría fueron obtenidos en el siglo XX por Helly, Borsuk, Hadwiger, Grömbaum, Klee y otros matemáticos.

En general, la geometría combinatoria se interesa en determinar el valor de la función $\max(\min(q(\Sigma)))$ donde q es una función con valores enteros (definida, por ejemplo, en la familia de combinaciones de cuerpos convexos en el espacio n -dimensional).

En esta tesis se estudian, dentro de la geometría combinatoria, los *sistemas de fijación* y los *sistemas de detención* de cuerpos compactos convexos en el plano \mathbb{R}^2 .

En el primer capítulo de esta tesis se dan las definiciones de *iluminación*, de *sostener*, del *funcional md* (introducido por V. Boltyanski en 1976 [3]). También se plantean el *problema de iluminación* y el *problema de sostener*; y su relación con los sistemas de fijación y sistemas de detención. Así como los resultados conocidos sobre los sistemas de fijación y los sistemas de detención.

Los sistemas de fijación fueron introducidos por el conocido matemático húngaro Laslo Fejes Tóth [14] en 1962. El estableció que la máxima cardinalidad de un sistema de fijación primitivo para un cuerpo compacto convexo en el plano es 6 y la mínima es 3. Posteriormente S. Fudali [15] prueba que esta cota superior se cumple únicamente cuando el cuerpo es un hexágono con lados opuestos paralelos. La aportación de esta tesis en este sentido es presentar una generalización de estos resultados presentando una clasificación completa de los cuerpos compactos convexos en el plano con respecto a la cardinalidad máxima de sus sistemas de fijación. Esto se presenta en el segundo capítulo.

El concepto de *sistema de detención* fue introducido por el matemático húngaro Peter Mani [17]. El estableció que la cardinalidad mínima de un sistema de detención primitivo para un cuerpo 2-dimensional es a lo más 3 y la cardinalidad máxima es no más de 5 obteniéndose esta última cota, en particular, para el pentágono regular. Generalizando este resultado en el capítulo 3 de esta tesis se presenta la clasificación completa de los cuerpos compactos convexos 2-dimensionales con respecto a la cardinalidad máxima de sus sistemas de detención.

CAPÍTULO 1

Sistemas de Fijación y Sistemas de Detención

1.1. Sistemas de Fijación

DEFINICIÓN 1.1.1

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y F un subconjunto de su frontera $\text{bd} M$. Un vector no cero $v \in \mathbb{R}^n$ *mueve* el interior de M fuera del conjunto F si para cada traslación de M , con la misma dirección que v , tenemos que el interior del cuerpo trasladado no tiene puntos en común con F , esto es, para cada número positivo λ tenemos que

$$(\lambda v + \text{int } M) \cap F = \emptyset.$$

DEFINICIÓN 1.1.2

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo compacto y F un subconjunto de su frontera $\text{bd} M$. Decimos que F es un *sistema de fijación* para el cuerpo M si no existe un vector no cero $v \in \mathbb{R}^n$ que mueva al interior de M fuera de F . Denotaremos por $\varrho_{\text{mín}}(M)$ la cardinalidad mínima de los sistemas de fijación para el cuerpo M .

Visualmente F es un sistema de fijación para M si colocando “clavos sin fricción” en todos los puntos de F eliminamos la posibilidad de trasladar a M en cualquier dirección.

El siguiente teorema nos da una manera equivalente de definir un sistema de fijación.

TEOREMA 1.1.1

Un conjunto $F \subset \text{bd}M$ es un sistema de fijación para el cuerpo M , si y sólo si, para cualquier vector $v \neq 0$ existe un número positivo λ tal que

$$(\lambda v + \text{int} M) \cap F \neq \emptyset.$$

B. Grünbaum [16] probó que:

TEOREMA 1.1.2 (GRÜNBAUM)

Para cualquier cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ las desigualdades

$$n + 1 \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2n \tag{1.1}$$

se cumplen.

Las desigualdades del teorema anterior son exactas, esto es, existen cuerpos compactos convexos para los cuales estas cotas se cumplen. Por ejemplo, la cota superior se cumple para un paralelepípedo.

En conexión con la cota superior del teorema anterior y del hecho de que esta cota se cumple para los paralelepípedos, Grünbaum formuló el problema siguiente:

PROBLEMA 1.1.1

Probar que el paralelepípedo n -dimensional M es el único cuerpo convexo compacto en \mathbb{R}^n para el cual $\varrho_{\min}(M) = 2n$.

DEFINICIÓN 1.1.3

Un sistema de fijación F para el cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es *primitivo* si ningún subconjunto propio de F es un sistema de fijación para M . Denotaremos por $\varrho_{\max}(M)$ la cardinalidad máxima de los sistemas de fijación primitivos para M .

Los sistemas de fijación y los sistemas de fijación primitivos fueron introducidos por Laslo Fejes Tóth [14]. El estableció que:

TEOREMA 1.1.3 (L. FEJES TÓTH)

Para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ el entero $\varrho_{\max}(M)$ satisface la desigualdad $\varrho_{\max}(M) \leq 6$.

S. Fudali [15] mostró que

TEOREMA 1.1.4 (FUDALI)

Los hexágonos con lados opuestos paralelos son las únicas figuras $M \subset \mathbb{R}^2$ para las cuales la igualdad $\varrho_{\text{máx}}(M) = 6$ se cumple.

OBSERVACIÓN 1.1.1

Todo sistema de fijación de cardinalidad mínima de un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un sistema de fijación primitivo de M .

En conexión con el resultado de Fejes Tóth que afirma que $\varrho_{\text{máx}}(M) \leq 6$ para cualquier cuerpo compacto convexo M en el plano, L. Danzer [13] conjeturó que:

CONJETURA 1.1.1

Para cualquier cuerpo compacto convexo M del espacio \mathbb{R}^3 se cumple la desigualdad $\varrho_{\text{máx}}(M) \leq 14$.

La cota de esta conjetura se cumple para el dodecahedro rómbico (esto es, la suma de Minkowski de cuatro segmentos tales que cualesquiera tres de ellos no están contenidos en un plano, véase figura 1.1).

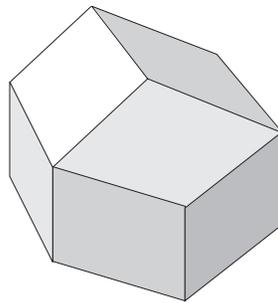


Figura 1.1:

Y en el caso más general, Danzer conjeturó que:

CONJETURA 1.1.2

Para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ se cumple que $\varrho_{\text{máx}}(M) \leq 2(2^n - 1)$.

Un politopo $P \subset \mathbb{R}^n$ que es la suma de Minkowski de $n + 1$ segmentos tales que cualesquiera n de ellos no están contenidos en un hiperplano tiene $2(2^n - 1)$ vértices y el conjunto de vértices de P es un sistema de fijación primitivo para P que tiene cardinalidad máxima y este politopo realiza la cota superior de la conjetura anterior.

Pero la conjetura de Danzer es falsa como fue mostrado por el matemático húngaro B. Bollobás en [1], quien construyó, para cada entero $k \geq 4$, un cuerpo convexo 3-dimensional M_k con $\varrho_{\max}(M_k) = k$. Tiempo después fue propuesto un cuerpo M con $\varrho_{\max}(M) = k$, que es más sencillo. Este cuerpo fue dado por Boltyanski y Martini [9] y se describe en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.1.1

Sea x_1, x_2, x_3 el sistema ortonormal de coordenadas canónicas en \mathbb{R}^3 . Denotemos por B la bola definida por la desigualdad $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2$ y por M el cuerpo $\text{conv}(B \cup \{b\})$ donde b es el punto $(0, 0, -2)$. Denotemos por C_γ la circunferencia $\text{bd} B \cap \Gamma_\gamma$ donde Γ_γ es el plano definido por la igualdad $x_3 = \gamma$ (con $|\gamma| < \sqrt{2}$). Consideremos a los puntos $a_1^{(\varepsilon)}, \dots, a_s^{(\varepsilon)}$ los cuales dividen a la circunferencia $C_{1-\varepsilon}$ en s partes iguales, $s \geq 3$ (véase figura 1.2). Ahora elegimos un punto arbitrario $q \in C_{-1}$ y denotemos por l_q la dirección definida por el vector $q - b$. Entonces existe un número positivo ε con las propiedades siguientes:

- (i) para cada $q \in C_{-1}$ la dirección l_q ilumina al menos a uno de los puntos $a_1^{(\varepsilon)}, \dots, a_s^{(\varepsilon)}$;
- (ii) para cada $k \in \{1, \dots, s\}$ existe un punto $q \in C_{-1}$ tal que la dirección l_q ilumina al punto $a_k^{(\varepsilon)}$ y no ilumina a ningún punto $a_j^{(\varepsilon)}$ con $j \neq k$. De esto concluimos que $F = \{b, a_1^{(\varepsilon)}, \dots, a_s^{(\varepsilon)}\} \subset \text{bd} M$ es un sistema de fijación primitivo para el cuerpo M que tiene cardinalidad $s + 1$.

La diferencia entre este ejemplo y el dado por Bollobás es la cantidad de puntos frontera no regulares del cuerpo. En el ejemplo de Bollobás el cuerpo tiene una infinidad de puntos frontera no regulares y el cuerpo del ejemplo 1.1.1 sólo tiene un punto frontera no regular.

Ahora introduciremos unas nociones necesarias para plantear la relación que existe entre los sistemas de fijación y el *problema de iluminación* (formulado por V. Boltyanski en 1960 [2]).

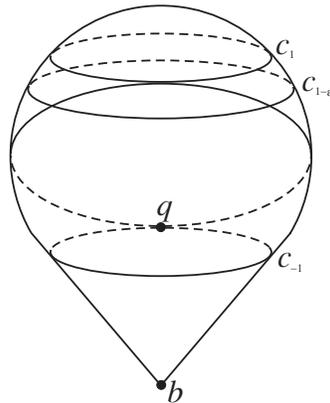


Figura 1.2:

DEFINICIÓN 1.1.4

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y p un vector no cero. Un punto frontera a de M es *iluminado* por la dirección del vector p si, para un número $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, el punto $a + \lambda p$ pertenece al interior de M (en la figura 1.3 el punto a es iluminado por la dirección del vector p , pero los puntos b, c no son iluminados por esta dirección).

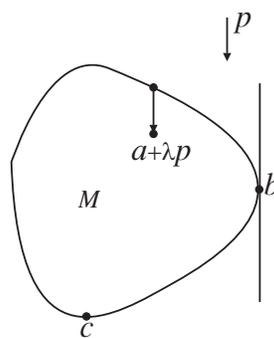


Figura 1.3:

En ocasiones escribiremos que el vector p ilumina al punto a en lugar de escribir que la dirección del vector p ilumina al punto a .

En la literatura se denota por $c(M)$ al mínimo de los enteros c tal que existen c vectores p_1, \dots, p_c cuyas direcciones iluminan a toda la frontera de M (iluminación en el sentido de Boltyanski).

Ahora planteamos un teorema que relaciona el problema de iluminación con los sistemas de fijación. Este teorema es una gran herramienta para resolver algunos problemas sobre sistemas de fijación.

TEOREMA 1.1.5

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y F un subconjunto de su frontera. El conjunto F es un sistema de fijación para M , si y sólo si, cada dirección del espacio ilumina a al menos uno de los puntos de F .

Demostración:

Si la dirección l definida por el vector $v \neq 0$ ilumina al punto $a \in F$ (esto es, $a + \lambda v \in \text{int } M$ para un número positivo λ) entonces $a \in -\lambda v + \text{int } M$; por lo tanto el vector $-v$ no mueve al interior de M fuera de F . Así, si cada dirección ilumina a al menos un punto de F , entonces ningún vector no cero mueve al interior de M , $\text{int } M$, fuera de F , esto es, F es un sistema de fijación para M .

Recíprocamente, sea F un sistema de fijación para M y $v \neq 0$ un vector. Entonces la dirección del vector $-v$ no mueve al conjunto $\text{int } M$ fuera de F , esto es, existe $a \in F$ y un número $\lambda > 0$ tal que $a + \lambda v \in \text{int } M$ y, por lo tanto, la dirección del vector v ilumina al punto a . Así cada vector no cero ilumina a al menos uno de los puntos de F . ■

No es difícil de observar, con la ayuda del teorema 1.1.5, que los sistemas de fijación cumplen con el siguiente teorema de *semicontinuidad*:

TEOREMA 1.1.6

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y sea $F = \{b_1, \dots, b_s\}$ un sistema de fijación para M . Entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que si el conjunto $F' = \{b'_1, \dots, b'_s\} \subset \text{bd } M$ satisface la condición $\|b_i - b'_i\| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, s$, entonces F' también es un sistema de fijación para M .

Tampoco es difícil de ver que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo compacto convexo entonces existe un sistema de fijación F para M tal que la cardinalidad de F es igual a $\varrho_{\min}(M)$ y cada punto de F es un punto frontera regular de M .

Ahora introduciremos algunos términos necesarios para comprender el siguiente teorema a plantear.

DEFINICIÓN 1.1.5

Los vectores no-cero $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ se llaman *minimamente dependientes* si ellos son los vértices de un simplejo m -dimensional T el cual contiene al origen en su interior relativo (véase figura 1.4).

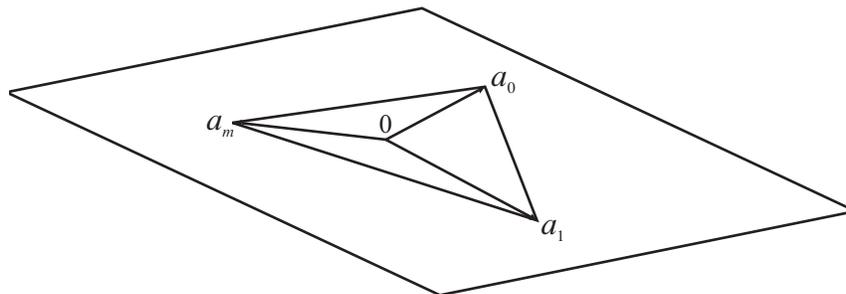


Figura 1.4:

Por ejemplo, dos vectores a_0, a_1 son minimamente dependientes, si y sólo si, el origen es un punto relativamente interior del segmento $[a_0, a_1]$ (véase figura 1.5). En otras palabras, a_0 y a_1 son minimamente dependientes, si y sólo si, $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 = 0$ para algunos coeficientes positivos adecuados.

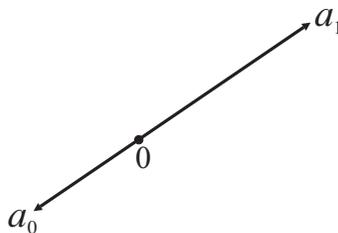


Figura 1.5:

DEFINICIÓN 1.1.6

Sea $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, esto es, cada elemento de H es un vector no-cero. Decimos que H es un conjunto *unilateral* si existe un semiespacio cerrado P con frontera Γ a través del origen tal que $H \subset P$. Si un conjunto H no es unilateral, entonces decimos que H es un conjunto *no-unilateral*.

TEOREMA 1.1.7

Un conjunto $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es unilateral, si y sólo si, el origen no pertenece al interior de $\text{conv } H$.

Demostración:

Supongamos que H es unilateral. Esto significa que $H \subset P$, donde P es un semiespacio cerrado con frontera Γ a través del origen. Entonces $\text{conv } H \subset P$ y por esto $\text{int conv } H \subset \text{int } P$. Como $0 \notin \text{int } P$, obtenemos que $0 \notin \text{int conv } H$.

Recíprocamente, si $0 \notin \text{int conv } H$, entonces los conjuntos $\{0\}$ y $\text{conv } H$ son separables. Por esto existe un hiperplano Γ a través del origen tal que $H \subset P$, donde P es un semiespacio cerrado con frontera Γ . Esto significa que H es unilateral. ■

LEMA 1.1.1

Sea $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un conjunto no-unilateral. Entonces existen, un entero $m \geq 1$, y vectores $a_0, \dots, a_m \in H$ los cuales son minimamente dependientes.

Demostración:

Como H es un conjunto no-unilateral, tenemos que $0 \in \text{int conv } H$ (por el teorema 1.1.7). Aplicando el teorema de Carathéodory concluimos que existen puntos $a_0, \dots, a_m \in H$ tales que a_0, \dots, a_m están en posición general y $0 \in T$ donde T es el simplejo con vértices a_0, \dots, a_m . Sin pérdida de generalidad (pasando de T a una cara de T , si es necesario), podemos suponer que $0 \in \text{rint } T$. Aquí $m \geq 1$ ya que $0 \notin H$. Así, los vectores a_0, \dots, a_m son minimamente dependientes. ■

TEOREMA 1.1.8 (BOLTYANSKI–MARTINI)

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y $F = \{b_1, \dots, b_s\}$ donde cada b_i es un punto frontera regular de M . Denotemos por p_1, \dots, p_s a las normales unitarias exteriores del cuerpo M en los puntos b_1, \dots, b_s , respectivamente. Entonces F es un sistema de fijación para M , si y sólo si, el sistema de vectores $\{p_1, \dots, p_s\}$ es no unilateral.

Demostración:

Probaremos la suficiencia. Sea v un vector no cero. Como el sistema de vectores $\{p_1, \dots, p_s\}$ es no unilateral existe al menos un vector p_i , $i \in \{1, \dots, s\}$, tal que $\langle v, p_i \rangle > 0$. El punto frontera b_i es regular y por lo tanto el vector $-v$ ilumina al punto b_i , esto es, para un número $\lambda > 0$ tenemos que $b_i - \lambda v \in \text{int } M$ (véase figura 1.6). Así, el vector v no mueve el interior de M fuera de F . Como esto se cumple para cualquier vector $v \neq 0$, tenemos que F es un sistema de fijación para M .

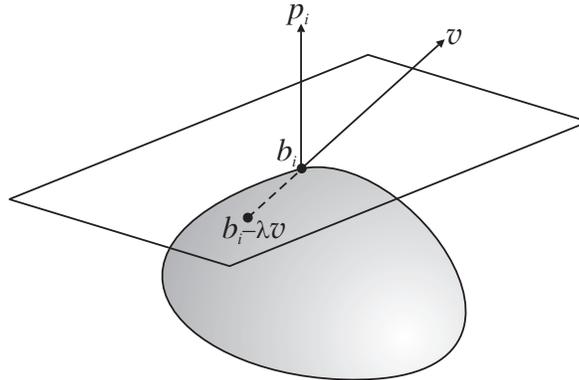


Figura 1.6:

Recíprocamente, supongamos que F es un sistema de fijación para M . Entonces para cada $v \neq 0$ existe un índice $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $-v$ ilumina al punto b_j (véase el teorema 1.1.5), esto es, $\langle p_i, v \rangle > 0$. Esto se cumple para cada vector $v \neq 0$ y por lo tanto el sistema de vectores p_1, \dots, p_s es no unilateral. ■

COROLARIO 1.1.1

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y $H(M)$ el conjunto de todas sus normales exteriores unitarias en sus puntos frontera regulares. Entonces $\varrho_{\min}(M)$ es igual al mínimo entero r tal que existen r vectores en $H(M)$ los cuales forman un sistema no unilateral.

Ahora necesitamos definir el número $\text{md } M$ que fue introducido por V. Boltyanski en 1976.

DEFINICIÓN 1.1.7

(Boltyanski) Sea $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un conjunto no-unilateral. El máximo entero m tal que existen $m + 1$ vectores minimamente dependientes en H es denotado por $\text{md } H$.

Observemos que $1 \leq \text{md } H \leq n$.

DEFINICIÓN 1.1.8

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un conjunto finito no-unilateral. Decimos que Σ es una *base positiva* de \mathbb{R}^n si todo subconjunto propio de Σ es unilateral.

EJEMPLO 1.1.2

Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ un simplejo n -dimensional conteniendo al origen en su interior y sea $\Sigma = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ el conjunto de sus vértices. Entonces Σ es una base positiva.

Es fácil ver que cada conjunto $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ no-unilateral contiene una base positiva. Esto se deduce del hecho de que si $H' \subset H$ es un conjunto finito no-unilateral, entonces es posible elegir de H' un conjunto no-unilateral de cardinalidad mínima).

LEMA 1.1.2

Sea Σ un conjunto finito de vectores no cero en \mathbb{R}^n . El conjunto Σ es una base positiva de \mathbb{R}^n , si y sólo si, cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede ser representado como una combinación lineal de los vectores de Σ con coeficientes no negativos y además ningún subconjunto propio de Σ tiene esta propiedad (esto es, para cada subconjunto propio Σ' de Σ existe un vector $y \in \mathbb{R}^n$ que no puede ser representado como una combinación lineal de los vectores de Σ' con coeficientes no negativos).

Demostración:

Supongamos que Σ es una base positiva. Por la definición 1.1.8, Σ es un conjunto no-unilateral y por el teorema 1.1.7, $0 \in \text{int conv } \Sigma$. Entonces existe un simplejo n -dimensional $T \subset \text{conv } \Sigma$ tal que $0 \in \text{int } T$. Denotemos por c_1, \dots, c_{n+1} los vértices de T . Cada vector c_i pertenece a $\text{conv } \Sigma$ y por esto puede ser representado como una combinación lineal no negativa de elementos de Σ . Sea ahora $x \in \mathbb{R}^n$ un vector no cero. Entonces existe un número positivo (suficientemente pequeño) λ tal que $\lambda x \in T$ y por esto λx puede ser representado como una combinación lineal no negativa de los elementos c_1, \dots, c_{n+1} . En consecuencia, el vector x puede ser representado como una combinación lineal no negativa de elementos de Σ .

Sea ahora Σ' un subconjunto propio de Σ . Por la definición 1.1.8, el conjunto Σ' es unilateral, esto es, existe un semiespacio cerrado Π con frontera a través del origen que contiene a Σ' . Denotemos por y la normal exterior unitaria del semiespacio Π . Entonces $y \notin \Pi$ y por esto y no puede ser representado como una combinación lineal de los vectores de $\Sigma' \subset \Pi$ con coeficientes no negativos. Así, la parte “sólo si” está probada.

Probaremos la parte “si”. Sea T un simplejo n -dimensional tal que $0 \in \text{int } T$. Denotemos por c_1, \dots, c_{n+1} los vértices de T . Por la hipótesis, cada vector c_i puede ser representado como una combinación lineal no negativa de elementos de Σ , esto es, $c_i \in \text{conv } \Sigma$. Esto significa que $T \subset \text{conv } \Sigma$ y consecuentemente, $0 \in \text{int conv } \Sigma$, esto es, Σ es no unilateral. Además, sea Σ' un subconjunto propio de Σ . Por hipótesis, existe un vector y que no puede ser representado como combinación lineal no negativa de los elementos de Σ' . Entonces Σ' no puede ser un conjunto no unilateral. En efecto, si Σ' es no unilateral, entonces, como fue probado en la primera parte, cada vector x (y, en particular, el vector y) puede ser representado como una combinación lineal no negativa de los elementos de Σ' . ■

TEOREMA 1.1.9

Sea Σ una base positiva del espacio \mathbb{R}^n . Entonces existe una descomposición directa $\mathbb{R}^n = L \oplus N$, con el subespacio N no trivial, tal que, denotando por q la dimensión de N y por $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ la proyección paralela a L , tenemos la descripción siguiente de la base positiva Σ : la intersección $\Sigma \cap L$ es una base positiva en el subespacio L y además, el conjunto $\Sigma \setminus L$ consiste de $q + 1$ vectores b_0, \dots, b_q tales que $\pi(b_0), \dots, \pi(b_q)$ son los vértices de un simplejo q -dimensional en N que contiene al origen en su interior relativo.

Demostración:

Haremos inducción sobre el número n . Por el lema 1.1.1 tenemos que existen vectores $a_0, \dots, a_m \in H$ los cuales son minimamente dependientes. Denotemos por L_1 al subespacio generado por a_1, \dots, a_m (también $a_0 \in L_1$). Denotemos por N_1 al complemento ortogonal de L_1 y por $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow N_1$ la proyección ortogonal correspondiente. Como Σ es no-unilateral, el conjunto $\pi_1(\Sigma)$ es no-unilateral en N_1 . Sea $\Sigma' = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \pi_1(\Sigma)$ una base positiva del subespacio N_1 . Elegimos vectores $c_1, \dots, c_k \in \Sigma$ tales que $\pi_1(c_i) = v_i$ para $i = 1, \dots, k$. Es fácil ver que $\bar{\Sigma} = \{a_0, a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_k\}$ es una base positiva de \mathbb{R}^n . En efecto, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $\pi_1(x) \in N_1$ y por esto $\pi_1(x) = \nu_1 v_1 + \dots + \nu_k v_k$ con los coeficientes ν_i no negativos. Esto significa que $\pi_1(x - \nu_1 c_1 - \dots - \nu_k c_k) = 0$, esto es, $y = x - \nu_1 c_1 - \dots - \nu_k c_k \in L_1$. En consecuencia $y = \nu_0 a_0 + \nu_1 a_1 + \dots + \nu_m a_m$ con los coeficientes no negativos (ya que el origen es un punto relativamente interior del simplejo con vértices a_0, a_1, \dots, a_m). En otras palabras, $x = y + (x - y)$ es una combinación lineal de los vectores $a_0, a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_k$ con coeficientes no negativos. Así, $\bar{\Sigma}$ es una base positiva de \mathbb{R}^n .

Como $\bar{\Sigma} \subset \Sigma$ concluimos que $\bar{\Sigma}$ y Σ coinciden y además Σ' coincide con $\pi_1(\Sigma)$. Ya que $\dim L_1 = m$, $\dim N_1 = n - m < n$ tenemos (por la hipótesis de inducción) que la base positiva Σ' de N_1 tiene la forma siguiente: existe una descomposición directa $N_1 = L' \oplus N$ con el subespacio N no trivial de manera que, si denotamos por q la dimensión de N y por $\pi_2 : N_1 \rightarrow N$ la proyección paralela a L' , tenemos que $\Sigma' \cap L'$ es una base positiva en el subespacio L' y además el conjunto $\Sigma' \setminus L'$ consiste de los $q+1$ vectores b_0, \dots, b_q tales que los puntos $\pi_2(b_0), \dots, \pi_2(b_q)$ son los vértices de un simplejo q -dimensional T , en N , que contiene al origen en su interior relativo. Ahora la composición $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ es una proyección ortogonal $\mathbb{R}^n \rightarrow N$ y si denotamos por L al subespacio $L_1 \oplus L'$ tenemos que $\mathbb{R}^n = L \oplus N$ y $\Sigma \cap L$ es una base positiva en el subespacio L . Queda por observar que $\{b_0, \dots, b_q\} = \Sigma \setminus L$ y los puntos $\pi(b_i) = \pi_2(\pi_1(b_i))$, $i = 0, \dots, q$, son los vértices del simplejo T . ■

COROLARIO 1.1.2

Si Σ es una base positiva de \mathbb{R}^n entonces el conjunto Σ contiene a lo más $2n$ elementos.

En efecto, haremos inducción sobre n . Consideremos la descripción de Σ dada en el teorema 1.1.9. Denotemos por p a la dimensión del espacio L y por $q = n - p$ la dimensión de N . Como $\Sigma' = \Sigma \cap L$ es una base positiva de L , entonces, por la hipótesis de inducción, Σ' contiene a lo más $2p = 2(n - q)$ vectores. Entonces, añadiendo los vectores b_0, b_1, \dots, b_q , concluimos que la base Σ tiene a lo más $2(n - q) + (q + 1)$ vectores, esto es, a lo más $2n$ vectores (ya que $q \geq 1$ y por esto $q + 1 \leq 2q$).

LEMA 1.1.3

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un sistema no unilateral de vectores. Entonces existe un subsistema $S' \subset S$ que también es no unilateral en \mathbb{R}^n y contiene no más de $2n + 1 - \text{md } S$ vectores.

Demostración:

Sea $m = \text{md } S$ y elegimos $m + 1$ vectores $p_0, p_1, \dots, p_m \in S$ minimamente dependientes. Luego denotemos por L al plano m -dimensional generado por los vectores elegidos, por N el complemento ortogonal del plano L y por $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ la proyección ortogonal de \mathbb{R}^n al plano N . El sistema $\pi(S)$ es no unilateral en N y por esto existe una base positiva $Q \subset \pi(S)$ de N . Por el corolario 1.1.2 la cardinalidad de Q no es mayor que $2(n - m)$ (ya que la dimensión de N es igual a $n - m$). Ahora para cada vector $q \in Q$ elegimos un vector $p \in S$ tal que $\pi(p) = q$ y denotemos por P al conjunto de todos los vectores elegidos.

Consideremos el sistema $S' = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \cup P$. Este sistema está contenido en S y contiene no más de $m + 1 + 2(n - m) = 2n + 1 - m$ vectores. Además, no es difícil de ver que el sistema S' es no unilateral en \mathbb{R}^n . ■

DEFINICIÓN 1.1.9

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Por $H(M)$ denotamos al conjunto de todas las normales exteriores unitarias de M en sus puntos frontera regulares.

No es difícil probar que, dado un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto $H(M)$ es no unilateral en \mathbb{R}^n (en realidad $H(M)$ es no unilateral, si y sólo si, M es compacto). Esta observación le da sentido a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1.10

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. Por $\text{md } M$ denotaremos al entero $\text{md } H(M)$.

Usando directamente la definición anterior podemos establecer el siguiente teorema:

TEOREMA 1.1.10

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. Entonces $\text{md } M = 1$, si y sólo si, M es un paralelotopo.

Ahora tenemos un teorema que relaciona el número $\varrho_{\min}(M)$ con el valor de $\text{md } M$.

TEOREMA 1.1.11 (BOLTYANSKI–MARTINI)

Para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ la desigualdad

$$\varrho_{\min}(M) \leq 2n + 1 - \text{md } M$$

se cumple.

Demostración:

Denotemos por r al entero $\varrho_{\min}(M)$ y por m al entero $\text{md } M$. Del teorema 1.1.8 concluimos que existen puntos frontera regulares b_1, \dots, b_r tales que las normales exteriores unitarias p_1, \dots, p_r de M , en estos puntos, forman un sistema no unilateral S . Por el lema 1.1.3 existe un subsistema $S' \subset S$ no unilateral en \mathbb{R}^n que contiene no más de $2n + 1 - m$ vectores. Como el sistema S tiene cardinalidad mínima (por el corolario 1.1.1) el sistema S' debe de *coincidir* con S . Así, por el teorema 1.1.8, los puntos b_1, \dots, b_r forman un sistema de fijación para M que consiste de $r \leq 2n + 1 - m$ puntos. ■

Del teorema 1.1.11 obtenemos la solución del problema de Grünbaum (que consiste en probar que para el cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ la igualdad $\varrho_{\min}(M) = 2n$ se cumple, si y sólo si, M es un paralelepípedo sólido). En efecto, si $\varrho_{\min}(M) = 2n$ entonces por el teorema 1.1.11 concluimos que $\text{md } M = 1$ y por esto M es un paralelepípedo n -dimensional.

LEMA 1.1.4

Sean $S = \{a_1, \dots, a_s\} \subset \mathbb{R}^n$ un sistema de vectores no unilateral y $m = \text{md } S$. Entonces existen una descomposición ortogonal $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ y una partición $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$ (donde $S_i \cap S_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$) tales que:

- (i) $\dim L_i \leq m$ para $i = 1, \dots, r$;
- (ii) $\pi_i(S_i)$ es no unilateral en L_i donde $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow L_i$ es la proyección ortogonal.

Demostración:

Sea $m = \text{md } S$ y elegimos $m + 1$ vectores $p_0, p_1, \dots, p_m \in S$ minimamente dependientes. Luego denotemos por L_1 el plano m -dimensional generado por los vectores elegidos, por L' el complemento ortogonal del plano L_1 y por $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow L'$ la proyección ortogonal. Entonces el sistema $S' = \pi(S)$ es no unilateral en L' y $\text{md } S' \leq m$. Haciendo inducción sobre n tenemos que para el sistema S' y el espacio L' el lema se cumple, esto es, existen una descomposición ortogonal $L' = L_2 \oplus \dots \oplus L_r$ y una partición $S' = S'_2 \cup \dots \cup S'_r$ tales que:

- (i) $\dim L_i \leq m$ para $i = 2, \dots, r$;
- (ii) $\pi'_i(S'_i)$ es no unilateral en L_i donde $\pi'_i : L' \rightarrow L_i$ es la proyección ortogonal.

Queda por denotar al sistema $\pi_i^{-1}(S'_i) \cap S$ por S_i , $i = 2, \dots, r$, y observar que $\pi'_i \circ \pi$ es la proyección ortogonal $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow L_i$. ■

TEOREMA 1.1.12 (BOLTYANSKI–MORALES-AMAYA)

Para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ la desigualdad

$$n + \frac{n}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M)$$

se cumple.

Demostración:

Denotemos por s al entero $\varrho_{\min}(M)$ y por m al entero $\text{md } M$. Del teorema 1.1.8 concluimos que existen puntos frontera regulares b_1, \dots, b_s tales que las normales exteriores unitarias p_1, \dots, p_s , de M , en estos puntos, forman un sistema no unilateral S . Aplicando el lema 1.1.4 al sistema S obtenemos la descomposición ortogonal $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ y la partición $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$ tales que el sistema $\pi_i(S_i)$ es no unilateral en L_i . Denotemos la dimensión de L_i por m_i ; así $m_i \leq m$, $i = 1, \dots, r$ y $m_1 + \dots + m_r = n$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ elegimos vectores $a_1^i, \dots, a_{m_i+1}^i$ de S_i tales que $\pi_i(a_1^i), \dots, \pi_i(a_{m_i+1}^i)$ son minimamente dependientes. Uniendo todos los vectores elegidos obtenemos un subsistema $S' \subset S$ que consiste de $(m_1 + 1) + \dots + (m_r + 1) = n + r$ vectores. Así $\varrho_{\min}(M) \geq n + r$. Además como $m_i \leq m$ tenemos que $n \leq rm$, esto es, $r \geq \frac{n}{m}$. Finalmente obtenemos $\varrho_{\min}(M) \geq n + r \geq n + \frac{n}{m}$. ■

TEOREMA 1.1.13

Sean $\mathbb{R}^n = L^{(1)} \oplus L^{(2)}$ una descomposición directa de \mathbb{R}^n y $M^{(1)} \subset L^{(1)}$, $M^{(2)} \subset L^{(2)}$ cuerpos compactos convexos. Entonces para la suma directa $M = M^{(1)} \oplus M^{(2)}$ la igualdad

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M^{(1)}) + \varrho_{\min}(M^{(2)})$$

se cumple.

Demostración:

Consideremos un vector $v = (v_1, 0) \in \mathbb{R}^n$ donde $v_1 \in L^{(1)}$ es un vector no cero. Supongamos que un punto $x = (x_1, x_2) \in \text{bd}(M^{(1)} \oplus M^{(2)})$ está iluminado por la dirección del vector v . Entonces $x_2 \in \text{int } M^{(2)}$ y el punto $x_1 \in \text{bd } M^{(1)}$ está iluminado por la dirección del vector v_1 . Análogamente si un punto $x = (x_1, x_2)$ es iluminado por la dirección del vector $v' = (0, v_2)$, entonces $x_1 \in \text{int } M^{(1)}$ y el punto $x_2 \in \text{bd } M^{(2)}$ es iluminado por la dirección del vector v_2 .

Sea ahora $F = \{b_1, \dots, b_s\}$ un sistema de fijación para el cuerpo $M = M^{(1)} \oplus M^{(2)}$ donde $b_i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} \in \text{bd}(M^{(1)} \oplus M^{(2)})$. Considerando sólo las direcciones de los vectores de la forma $(v_1, 0)$ o $(0, v_2)$ podemos concluir que es necesario tener $s_1 = \varrho_{\min}(M_1)$ puntos $b_1^{(1)}, \dots, b_{s_1}^{(1)}$ del conjunto $F \cap (\text{bd } M^{(1)} \oplus \text{int } M^{(2)})$ y $s_2 = \varrho_{\min}(M^{(2)})$ puntos $b_1^{(2)}, \dots, b_{s_2}^{(2)}$ que pertenecen a $F \cap (\text{int } M^{(1)} \oplus \text{bd } M^{(2)})$. Así,

$$\varrho_{\min}(M^{(1)} \oplus M^{(2)}) \geq \varrho_{\min}(M^{(1)}) + \varrho_{\min}(M^{(2)}).$$

Recíprocamente, sea $\{b_1^{(1)}, \dots, b_{s_1}^{(1)}\}$ un sistema de fijación para $M^{(1)}$ y sea $\{b_1^{(2)}, \dots, b_{s_2}^{(2)}\}$ un sistema de fijación para $M^{(2)}$. Entonces los puntos

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{s_1}^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ b_1^{(2)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ b_{s_2}^{(2)} \end{pmatrix},$$

donde $x^{(1)} \in \text{int } M_1$, $x^{(2)} \in \text{int } M_2$, forman un sistema de fijación para el cuerpo $M^{(1)} \oplus M^{(2)}$. Así $\varrho_{\min}(M^{(1)} \oplus M^{(2)}) \leq \varrho_{\min}(M^{(1)}) + \varrho_{\min}(M^{(2)})$. ■

1.2. Sistemas de Detención

DEFINICIÓN 1.2.1

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y F un subconjunto de su frontera. Un vector no cero $v \in \mathbb{R}^n$ *mueve* a M fuera del conjunto F si para cada traslación de M en la dirección del vector v tenemos que el cuerpo trasladado no tiene puntos en común con F , esto es, para cada número positivo λ tenemos que

$$(\lambda v + M) \cap F = \emptyset.$$

DEFINICIÓN 1.2.2

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo compacto y F un subconjunto de su frontera $\text{bd} M$. Decimos que F es un *sistema de detención* para el cuerpo M si no existe un vector no cero $v \in \mathbb{R}^n$ que mueve a M fuera de F . Denotaremos por $\sigma_{\min}(M)$ a la cardinalidad mínima de los sistemas de detención para el cuerpo M .

Como podemos ver, un sistema de detención difiere de un sistema de fijación al considerar M en lugar de $\text{int} M$.

Visualmente, F es un sistema de detención para M si, poniendo “clavos con fricción” en todos los puntos de F , eliminamos la posibilidad de trasladar a M en cualquier dirección.

El concepto de sistema de detención fue introducido por el matemático húngaro Peter Mani [17]. El estableció el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.1

Para cualquier cuerpo compacto convexo M del plano \mathbb{R}^2 se cumple la desigualdad $\sigma_{\min}(M) \leq 3$.

La igualdad del teorema anterior se tiene, por ejemplo, para un triángulo equilátero.

El siguiente teorema nos da una manera equivalente de definir un sistema de detención.

TEOREMA 1.2.2

Un conjunto $F \subset \text{bd} M$ es un sistema de detención para M , si y sólo si, para cualquier vector $v \neq 0$ existe un número positivo λ tal que

$$(\lambda v + M) \cap F \neq \emptyset.$$

DEFINICIÓN 1.2.3

Un sistema de detención F para el cuerpo $M \subset \mathbb{R}^n$ es *primitivo* si ningún subconjunto propio de F es un sistema de detención para M . Denotaremos por $\sigma_{\max}(M)$ la cardinalidad máxima de los sistemas de detención primitivos para M .

En 1971 P. Mani [17] estableció el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.3

Para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ se tiene que $\sigma_{\max}(M) \leq 5$.

La cota superior se tiene, por ejemplo, para el pentágono regular $M \subset \mathbb{R}^2$. En el capítulo 3 de esta tesis se presentan unos resultados más generales.

Es fácil ver que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo compacto convexo y $F \subset \text{bd } M$ es un sistema de detención para M de cardinalidad $\sigma_{\max}(M)$, entonces F es un sistema de detención primitivo para M .

OBSERVACIÓN 1.2.1

Cada sistema de fijación para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es al mismo tiempo un sistema de detención para M .

OBSERVACIÓN 1.2.2

Todo sistema de detención de cardinalidad mínima de un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un sistema de detención primitivo para M .

De las definiciones de sistema de detención y de sistema de fijación es fácil deducir el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.4

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto estrictamente convexo. Entonces cada sistema de detención para M es al mismo tiempo un sistema de fijación para M y recíprocamente.

En efecto, un vector no cero $v \in \mathbb{R}^n$ mueve al conjunto $\text{int } M$ fuera de $F \subset \text{bd } M$, si y sólo si, v mueve M fuera de F (ya que M es estrictamente convexo).

Es fácil ver que para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ la desigualdad $\sigma_{\min}(M) \geq 2$ se cumple y que para cada paralelepípedo sólido $M \subset \mathbb{R}^n$ la igualdad $\sigma_{\min}(M) = 2$ se cumple.

También para cualquier cuerpo compacto convexo suave $M \subset \mathbb{R}^n$ tenemos que $\sigma_{\min}(M) = n+1$. Además, si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo compacto estrictamente convexo tenemos que $\sigma_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M)$.

De los resultados de P. Mani se concluye el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.5

Para cada cuerpo compacto convexo M del plano \mathbb{R}^2 se cumplen las desigualdades $3 \leq \sigma_{\max}(M) \leq 5$.

Ahora daremos unas definiciones que nos servirán para plantear un teorema que nos relaciona los sistemas de detención con el *problema de sostener*, introducido por V. Boltyanski y H. Martini, y que será una gran herramienta para establecer algunos teoremas posteriormente.

DEFINICIÓN 1.2.4

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y v un vector no cero. Un punto frontera a de M es *sostenido* por la dirección del vector v , si existe un número $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tal que el punto $a + \lambda v$ pertenece a M .

En la figura 1.7 los puntos a y b son sostenidos por la dirección del vector p , pero los puntos c , d y e no lo son.

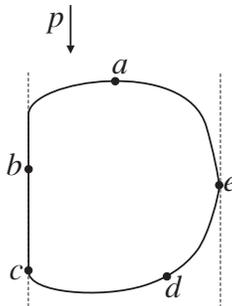


Figura 1.7:

Observemos que el punto a es iluminado por la dirección del vector p , pero el punto b no es iluminado por la dirección de este vector siendo sostenido por esta misma dirección. Esto muestra la diferencia entre *el problema de iluminación* y *el problema de sostener* (ver definición 1.2.5).

EJEMPLO 1.2.1

A diferencia de los sistemas de fijación, para los sistemas de detención la afirmación del teorema 1.1.6 no se cumple. En efecto, consideremos el cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ que se muestra en la figura 1.8, esto es, M es la intersección de un cuarto de círculo y una banda de ancho menor que el radio del círculo.

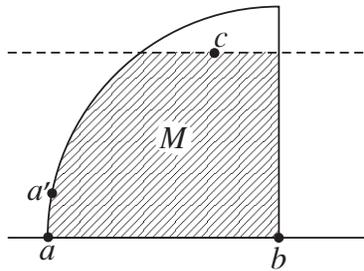


Figura 1.8:

Por F denotemos el subconjunto $\{a, b, c\}$ de la frontera de M donde a, b, c son puntos como en la figura 1.8. Es fácil ver que F es un sistema de detención para M . Al mismo tiempo, si cambiamos el punto a por el punto a' (a una distancia arbitrariamente pequeña del punto a) entonces obtenemos el conjunto $\{a', b, c\}$ que no es un sistema de detención para M (véase la figura 1.9)

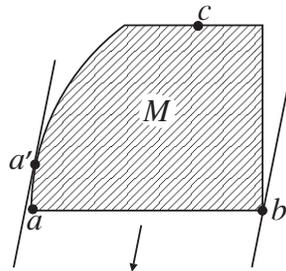


Figura 1.9:

DEFINICIÓN 1.2.5

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. Denotemos por $s(M)$ al mínimo de los enteros s tal que existen s vectores v_1, \dots, v_s cuyas direcciones sostienen a toda la frontera de M . Así $s(M)$ es una función con valores enteros definida sobre la familia de todos los cuerpos compactos convexos en \mathbb{R}^n . *El problema de sostener* un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ dado, consiste en encontrar el número $s(M)$ o, de manera más general, encontrar el número $\max_M s = s(M)$, el máximo es considerado sobre todos los cuerpos compactos convexos $M \subset \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.2.6 (BOLTYANSKI)

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y F un subconjunto de su frontera. Entonces F es un sistema de detención para M , si y sólo si, cada dirección sostiene a al menos uno de los puntos de F .

Demostración:

Si la dirección l definida por el vector $v \in \mathbb{R}^n$ sostiene al punto $a \in F$ (esto es, $a + \lambda v \in M$ para un número positivo λ) entonces $a \in -\lambda v + M$; por lo tanto el vector $-v$ no mueve a M fuera de F . Así, si cada dirección sostiene a al menos un punto de F entonces ningún vector no cero mueve a M fuera de F , esto es, F es un sistema de detención para M . Recíprocamente, sea F un sistema de detención para M y $v \neq 0$ un vector. Entonces la dirección del vector $-v$ no mueve a M fuera de F , esto es, existe $a \in F$ y un número $\lambda > 0$ tales que $a + \lambda v \in M$. Esto significa que la dirección del vector v sostiene al punto a . ■

LEMA 1.2.1

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y b_1, \dots, b_s puntos frontera regulares de M . Denotemos por v_1, \dots, v_s a las normales exteriores de M correspondientes a estos puntos. Denotemos por L al subespacio generado por los vectores v_1, \dots, v_s y supongamos que estos vectores forman un sistema no unilateral en L . Además denotemos por N al complemento ortogonal de L en \mathbb{R}^n y supongamos que una bola B del subespacio N con centro en el origen satisface la inclusión $B' = b_1 + B \subset \text{bd } M$. Entonces b_1, \dots, b_s es un sistema de detención para M .

Demostración:

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no cero. Lo escribimos en la forma $v = v_L + v_N$ donde $v_L \in L$ y $v_N \in N$. Probaremos que el vector v sostiene a al menos uno de los puntos b_1, \dots, b_s y esto significa que $\{b_1, \dots, b_s\}$ es un sistema de detención para M .

Primero supongamos que $v_L \neq 0$. Como el sistema v_1, \dots, v_s es no unilateral en L existe un índice $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que el producto escalar $\langle v_L, v_i \rangle$ es negativo y en consecuencia $\langle v, v_i \rangle < 0$ (ya que $\langle v_N, v_i \rangle = 0$). Por esto (ya que el punto frontera b_i de M es regular) el vector v ilumina al punto b_i y en consecuencia el vector v sostiene a este punto.

Supongamos ahora que $v_L = 0$, esto es, $v = v_N$. Como la bola B' (que es paralela al subespacio N) está contenida en $\text{bd } M$ tenemos que el vector $v = v_N$ sostiene al punto $b_1 \in \text{bd } M$. Así cada vector no cero sostiene a al menos uno de los puntos b_1, \dots, b_s . ■

LEMA 1.2.2

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo tal que $\text{md } M = m$. Sean b_1, \dots, b_{m+1} puntos frontera regulares de M tales que las normales exteriores unitarias correspondientes v_1, \dots, v_{m+1} son minimamente dependientes. Denotemos por L el subespacio m -dimensional generado por los vectores v_1, \dots, v_{m+1} y por N su complemento ortogonal. Entonces existe un número positivo r tal que para cada índice $i \in \{1, \dots, m+1\}$ la bola $B_i \subset b_i + N$ de dimensión $\dim N = n - m$ con radio r y centro b_i está totalmente contenida en $\text{bd } M$.

Demostración:

Probaremos la afirmación del lema para el índice $i = 1$ (para los demás índices la prueba es análoga). Supongamos que tal número r no existe. Entonces para cada entero $k > 0$ existe un punto $x^{(k)} \in b_1 + N$ tal que $\|x^{(k)} - b_1\| < \frac{1}{k}$ y $x^{(k)} \notin \text{bd } M$, esto es, $x^{(k)} \notin M$ o $x^{(k)} \in \text{int } M$. Pasando a una subsucesión, si es necesario, podemos suponer que $x^{(k)} \notin M$ para todos los k o $x^{(k)} \in \text{int } M$ para todos los k . Consideremos el segundo caso: $x^{(k)} \in \text{int } M$, $k = 1, 2, \dots$, y denotemos por $y^{(k)}$ el punto que es simétrico al punto $x^{(k)}$ con respecto al centro b_1 , esto es, $y^{(k)} = 2b_1 - x^{(k)}$. Como $x^{(k)} \in \text{int } M$ y $b_1 \in \text{bd } M$ tenemos que $y^{(k)} \notin M$ para cada $k = 1, 2, \dots$ (y además $y^{(k)} \in b_1 + N$), esto es, el segundo caso se reduce al primero. Así es suficiente suponer que $x^{(k)} \notin M$ para todos los k .

Elegimos un punto frontera regular $c^{(k)}$ de M tal que el hiperplano soporte $\Gamma^{(k)}$ de M en el punto $c^{(k)}$ separa a $x^{(k)}$ de M , esto es, $x^{(k)}$ pertenece al semiespacio $P = \{x : \langle x - c^{(k)}, p^{(k)} \rangle > 0\}$ donde $p^{(k)}$ es la normal exterior unitaria de M en el punto $c^{(k)}$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)} = v_1$. Además $p^{(k)}$ no es paralelo al plano L (en caso contrario $\Gamma^{(k)} \supset N + b_1$ y por esto $x^{(k)} \notin P$).

Sean g_1, \dots, g_s puntos frontera regulares de M tales que las normales exteriores unitarias correspondientes f_1, \dots, f_s forman un sistema no unilateral en \mathbb{R}^n . Denotemos por π la proyección ortogonal $\mathbb{R}^n \rightarrow N$. Entonces los vectores $\pi(f_1), \dots, \pi(f_s)$ forman un sistema no unilateral en N . Podemos suponer que para un número $t \leq s$ los vectores $\pi(f_1), \dots, \pi(f_t)$ son no cero y $\pi(f_{t+1}) = \dots = \pi(f_s) = 0$; por esto los vectores f_{t+1}, \dots, f_s son paralelos al plano L .

Para cada $k = 1, 2, \dots$ el vector $\pi(p^{(k)})$ es no cero y por esto el sistema de vectores $\pi(f_1), \dots, \pi(f_s)$ contiene un subsistema $F \subset \{\pi(f_1), \dots, \pi(f_s)\}$ tal que el vector $\pi(p^{(k)})$ junto con F forma un sistema minimamente dependiente. Pasando a una subsucesión, si es necesario, podemos suponer que el sistema F es el mismo para todos los enteros k . Sin pérdida de generalidad es posible suponer que $F = \{\pi(f_1), \dots, \pi(f_u)\}$ donde $u \leq t$. Así, para cada $k = 1, 2, \dots$ los vectores $\pi(p^{(k)}), \pi(f_1), \dots, \pi(f_u)$ son minimamente dependientes. Sea

$$\pi(p^{(k)}) + \alpha_1^{(k)}\pi(f_1) + \dots + \alpha_u^{(k)}\pi(f_u) = 0 \quad (1.2)$$

una dependencia positiva de estos vectores. Entonces tenemos que los vectores $\pi(f_1), \dots, \pi(f_u)$ son linealmente independientes.

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)} = v_1$, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi(p^{(k)} - v_1) = 0$ y por esto $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi(p^{(k)}) = 0$ (ya que $\pi(v_1) = 0$). En consecuencia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^{(k)} = 0, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_u^{(k)} = 0. \quad (1.3)$$

De la igualdad (1.2) concluimos que el vector $p^{(k)} + \alpha_1^{(k)}f_1 + \dots + \alpha_u^{(k)}f_u$ es paralelo al subespacio L . Por esto el vector

$$v^{(k)} = (p^{(k)} - v_1) + \alpha_1^{(k)}f_1 + \dots + \alpha_u^{(k)}f_u \quad (1.4)$$

también es paralelo a L . Como $\lim_{k \rightarrow \infty} (p^{(k)} - v_1) = 0$, tenemos de (1.3) que $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = 0$. Sea

$$v^{(k)} = \beta_2^{(k)}v_2 + \dots + \beta_{m+1}^{(k)}v_{m+1} \quad (1.5)$$

la representación de $v^{(k)}$ en la base v_2, \dots, v_{m+1} del plano L . Ahora de la igualdad $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = 0$ concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_2^{(k)} = 0, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{m+1}^{(k)} = 0. \quad (1.6)$$

Sea

$$v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \quad (1.7)$$

una dependencia positiva entre v_1, v_2, \dots, v_{m+1} . Entonces de (1.4), (1.5) y (1.7) concluimos que

$$\begin{aligned} p^{(k)} &+ \alpha_1^{(k)} f_1 + \cdots + \alpha_u^{(k)} f_u \\ &+ \left(\lambda_2 - \beta_2^{(k)} \right) v_2 + \cdots + \left(\lambda_{m+1} - \beta_{m+1}^{(k)} \right) v_{m+1} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Así, (1.8) es una dependencia lineal entre los vectores

$$p^{(k)}, f_1, \dots, f_u, v_2, \dots, v_{m+1}. \quad (1.9)$$

Como los números $\lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ son positivos, de la igualdad (1.5) concluimos que, para k suficientemente grande, todos los coeficientes en (1.8) son positivos. Fijemos tal entero k . Así (1.8) es una *dependencia positiva* entre los vectores de (1.9).

Además los vectores $f_1, \dots, f_u, v_2, \dots, v_{m+1}$ (obtenidos cuando iluminamos el primer vector de (1.9)) son linealmente independientes. En efecto sea

$$\nu_1 f_1 + \cdots + \nu_u f_u + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{m+1} v_{m+1} = 0 \quad (1.10)$$

una dependencia lineal entre estos vectores. Bajo la proyección π obtenemos que $\nu_1 \pi(f_1) + \cdots + \nu_u (\pi(f_u)) = 0$ de donde $\nu_1 = \cdots = \nu_u = 0$ (ya que los vectores $\pi(f_1), \dots, \pi(f_u)$ son linealmente independientes). Por esto la dependencia lineal (1.10) toma la forma

$$\mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{m+1} v_{m+1} = 0. \quad (1.11)$$

Pero esto implica que $\mu_2 = \cdots = \mu_{m+1} = 0$ (ya que los vectores v_2, \dots, v_{m+1} del plano L son linealmente independientes). Así cada dependencia lineal entre $f_1, \dots, f_u, v_2, \dots, v_{m+1}$ es trivial y por lo tanto estos vectores son linealmente independientes. En consecuencia los vectores de (1.9) son minimamente dependientes. Estos vectores son normales exteriores unitarias en puntos frontera regulares de M y por esto $\text{md } M \geq m+u$. Como $u \geq 1$ obtenemos que $\text{md } M \geq m+1$ en contradicción con la igualdad $\text{md } M = m$. ■

TEOREMA 1.2.7 (BOLTYANSKI)

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. Entonces $\sigma_{\min}(M) \leq \text{md } M + 1$.

Demostración:

Denotemos al entero $\text{md } M$ por m . Entonces existen $m+1$ puntos frontera regulares b_1, \dots, b_{m+1} de M tales que las normales exteriores unitarias correspondientes v_1, \dots, v_{m+1} son minimamente dependientes. Bajo la notación del lema 1.2.2 tenemos que, para cada $i = 1, \dots, m+1$, la bola B_i está contenida en la frontera de M . Ahora el lema 1.2.1 implica que los $m+1$ puntos b_1, \dots, b_{m+1} forman un sistema de detención para M . En consecuencia $\sigma_{\min}(M) \leq m+1 = \text{md } M + 1$. ■

No es difícil demostrar los siguientes tres teoremas.

TEOREMA 1.2.8

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. Si M es estrictamente convexo, entonces $\sigma_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M) = n + 1$.

TEOREMA 1.2.9

Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo compacto convexo entonces existe un sistema de detención F , para M , tal que la cardinalidad de F es igual a $\sigma_{\min}(M)$ y cada punto de F es un punto frontera regular de M .

TEOREMA 1.2.10

Sea M un cuerpo compacto convexo del espacio \mathbb{R}^n y consideremos el conjunto $F = \{b_1, \dots, b_s\}$ donde cada b_i es un punto frontera regular de M . Denotemos por p_1, \dots, p_s a las normales unitarias exteriores del cuerpo M en los puntos b_1, \dots, b_s , respectivamente. Si los vectores $\{p_1, \dots, p_s\}$ son mínimamente dependientes entonces F es un sistema de detención para M .

TEOREMA 1.2.11

Supongamos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo convexo y sean v_1, \dots, v_p las normales exteriores unitarias de sus caras principales. Denotemos por c al mínimo de los enteros positivos k tales que existen $k+1$ vectores minimamente dependientes entre v_1, \dots, v_p . Entonces $\sigma_{\min}(M) = c + 1$.

Demostación:

Sin pérdida de generalidad supongamos que los vectores v_1, \dots, v_{c+1} son mínimamente dependientes. Sean $\Delta_1, \dots, \Delta_{c+1}$ las caras principales de M con las normales exteriores v_1, \dots, v_{c+1} , respectivamente. Elegimos puntos interiores b_1, \dots, b_{c+1} de estas caras principales, respectivamente. Denotemos por L al plano c -dimensional generado por v_1, \dots, v_{c+1} (recordemos que estos vectores son mínimamente dependientes) y por N el complemento ortogonal de L . Entonces existe un número positivo r tal que el plano $v_i + N$ contiene una bola $(n - c)$ -dimensional de radio r con centro en b_i , $i = 1, \dots, c + 1$ y los puntos b_1, \dots, b_{c+1} forman un sistema de detención para M (véase la demostración del teorema 1.2.7). Así, $\sigma_{\min}(M) \leq c + 1$.

Probaremos la desigualdad opuesta. Supongamos lo contrario, esto es, existen puntos frontera a_1, \dots, a_c de M que forman un sistema de detención para M . Elegimos caras principales $\Delta'_1, \dots, \Delta'_c$ tales que $a_i \in \Delta'_i$, $i = 1, \dots, c$ y denotemos por v'_1, \dots, v'_c a las normales exteriores unitarias de estas caras. Entonces los vectores v'_1, \dots, v'_c forman un sistema unilateral, esto es, existe un vector $q \neq 0$ tal que todos los productos escalares $\langle q, v'_i \rangle$ son negativos. Así $\langle \lambda q, v'_i \rangle < 0$ para cada $\lambda > 0$ y $i = 1, \dots, c$. Esto significa que el punto $a_i - \lambda q$ está situado en el semiespacio abierto $\{x : \langle v'_i, x - b_i \rangle < 0\}$ para $i = 1, \dots, c$. En otras palabras, $a_i \notin \lambda q + M$ y por esto $\{a_1, \dots, a_c\}$ no es un sistema de detención para M , en contradicción con la suposición. ■

TEOREMA 1.2.12

Sean $\mathbb{R}^n = L^{(1)} \oplus L^{(2)}$ una descomposición directa de \mathbb{R}^n y $M^{(1)} \subset L^{(1)}$, $M^{(2)} \subset L^{(2)}$ cuerpos compactos convexos. Entonces para la suma directa $M = M^{(1)} \oplus M^{(2)}$ la igualdad

$$\sigma_{\min}(M) = \min\left(\sigma_{\min}(M^{(1)}), \sigma_{\min}(M^{(2)})\right)$$

se cumple.

Demostación:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sigma_{\min}(M^{(1)}) \leq \sigma_{\min}(M^{(2)})$. Denotemos por q al número $\sigma_{\min}(M^{(1)})$ y elijamos puntos $a_1, \dots, a_q \in \text{rbd } M^{(1)}$ que formen un sistema de detención para $M^{(1)}$ (con respecto al plano $L^{(1)}$). Además, sea b un punto relativamente interior del cuerpo $M^{(2)} \subset L^{(2)}$. Entonces $a_1 + b, \dots, a_q + b$ son puntos frontera del cuerpo M . Mostraremos que $F = \{a_1 + b, \dots, a_q + b\}$ es un sistema de detención para M .

En efecto, sea $v = v_1 + v_2$ un vector no cero donde $v_1 \in L^{(1)}$ y $v_2 \in L^{(2)}$. Si $v_1 \neq 0$ entonces para algún índice $j = 1, \dots, q$ y para algún $\lambda > 0$, suficientemente pequeña, tenemos que el punto $(a_j + b) - \lambda v_1$ pertenece al cuerpo $M^{(1)}$ y por lo tanto el punto $(a_j + b) - \lambda v$ pertenece a M (ya que $b \in \text{rint } M^{(2)}$) esto significa que el vector v no mueve al cuerpo M fuera de F .

Pero si $v_1 = 0$ entonces para cada $j = 1, \dots, q$ el punto $(a_j + b) - \lambda v$ pertenece a M (si λ es suficientemente pequeña). Así en cualquier caso el vector $v \neq 0$ no mueve a M fuera del conjunto F , esto es, F es un sistema de detención para M y por lo tanto $\sigma_{\min}(M) \leq \sigma_{\min}(M^{(1)})$. ■

TEOREMA 1.2.13

Supongamos que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ donde M_1, \dots, M_s son cuerpos compactos convexos. Entonces

$$\sigma_{\min}(M) = \min \{ \sigma_{\min}(M_1), \dots, \sigma_{\min}(M_s) \}.$$

TEOREMA 1.2.14

Sean $\mathbb{R}^n = L^{(1)} \oplus L^{(2)}$ una descomposición directa de \mathbb{R}^n y $M^{(1)} \subset L^{(1)}$, $M^{(2)} \subset L^{(2)}$ cuerpos compactos convexos. Entonces para la suma directa $M = M^{(1)} \oplus M^{(2)}$ la igualdad

$$s(M) = \min \left(s \left(M^{(1)} \right), s \left(M^{(2)} \right) \right)$$

se cumple.

TEOREMA 1.2.15

Sea $\mathbb{R}^n = L^{(1)} \oplus \dots \oplus L^{(k)}$ una descomposición directa de \mathbb{R}^n . Para cada $i = 1, \dots, k$ sea $M^{(i)} \subset L^{(i)}$ un cuerpo compacto convexo. Entonces para el conjunto suma directa $M = M^{(1)} \oplus \dots \oplus M^{(k)}$ la igualdad

$$s(M) = \min \left(s \left(M^{(1)} \right), \dots, s \left(M^{(k)} \right) \right)$$

se cumple.

CAPÍTULO 2

Nuevos Resultados: Sistemas de Fijación

2.1. Clasificación por Sistemas de Fijación

Primero daremos las definiciones necesarias para después plantear algunos lemas que nos servirán para probar los teoremas principales de esta sección.

DEFINICIÓN 2.1.1

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y a, b dos de sus puntos frontera. Decimos que estos puntos son *antipodales* si existen dos hiperplanos paralelos Γ_a, Γ_b a través de los puntos a y b , respectivamente, tales que el conjunto M está totalmente contenido en la banda cerrada n -dimensional con frontera $\Gamma_a \cup \Gamma_b$. Si uno de los hiperplanos Γ_a, Γ_b tiene solamente un punto en común con M decimos que los puntos a y b son *semi-estrictamente antipodales*. Si es posible elegir a los hiperplanos Γ_a, Γ_b de manera que cada uno de los dos hiperplanos tiene solamente un punto en común con M decimos que los puntos a y b son *estrictamente antipodales*.

En la figura 2.1 los puntos $a, b \in \text{bd } M$ son estrictamente antipodales y los puntos a, c son semi-estrictamente antipodales. Finalmente, los puntos b, c son antipodales pero no son ni estrictamente antipodales ni semi-estrictamente antipodales.

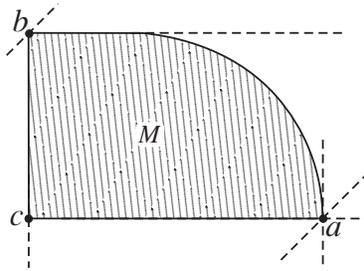


Figura 2.1:

DEFINICIÓN 2.1.2

Un pentágono convexo $P \subset \mathbb{R}^2$ es *aplanable* si tiene dos vértices vecinos que son puntos antipodales.

En la figura 2.2(a) el pentágono P tiene dos vértices vecinos en los cuales la suma de los ángulos interiores correspondientes es menor que π ; estos puntos son estrictamente antipodales y por esto P es aplanable. En la figura 2.2(b) los vértices a y b tienen la suma de sus ángulos interiores correspondientes igual a π ; estos vértices son antipodales (no estrictamente antipodales) y por esto P también es aplanable. Sin embargo, si para cada dos vértices vecinos de un pentágono la suma de los ángulos interiores correspondientes es mayor que π entonces ningún par de vértices vecinos son antipodales y por lo tanto el pentágono no es aplanable.

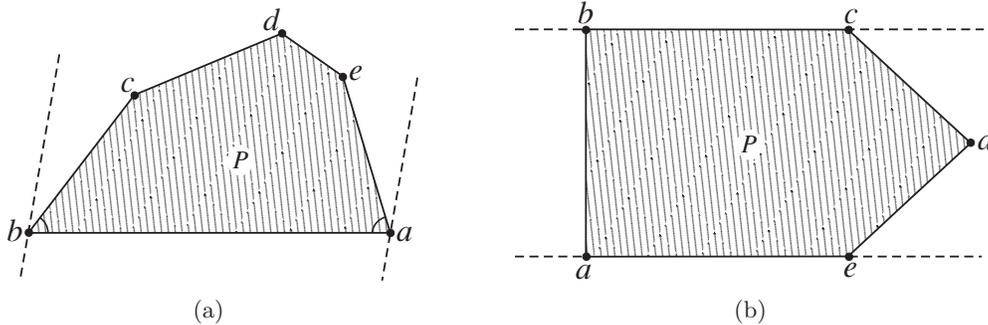


Figura 2.2:

LEMA 2.1.1

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo y F un sistema de fijación primitivo para M . Entonces cualesquiera tres puntos de F no pueden ser colineales, esto es, F es el conjunto de vértices de un polígono P inscrito en M . Además, si a y b son dos vértices no vecinos de P entonces a y b son puntos antipodales de M .

Demostración:

Supongamos que los puntos $a, b, c \in F$ son colineales y están situados en una línea soporte l de M . También podemos suponer que b está situado entre a y c . Si un vector no cero e ilumina al punto a , esta misma dirección ilumina al punto b ; esto implica que no existe una dirección que ilumine sólo al punto $a \in F$ contradiciendo el hecho de que F es un sistema de fijación primitivo para M . Por lo tanto, no existen tres puntos de F que sean colineales.

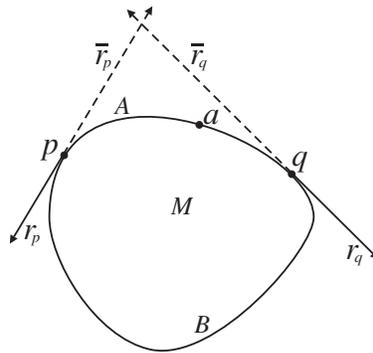


Figura 2.3:

Ahora si p y q son dos vértices no vecinos de $P = \text{conv } F$, ellos dividen la frontera de M en dos arcos abiertos A y B . Como p y q no son vecinos, existe un vértice a de P en A . Denotemos por r_p y r_q los rayos que emanan de p y q respectivamente y que son tangentes a B . Sean \bar{r}_p y \bar{r}_q los rayos opuestos. Si r_p y r_q tienen un punto en común (véase figura 2.3) entonces es imposible encontrar una dirección que ilumine sólo al punto a ; contradiciendo que F es un sistema de fijación primitivo para M . Entonces $r_p \cap r_q = \emptyset$, esto es, el arco B está situado en una banda con lados paralelos a través de los puntos p y q . De manera análoga el arco A está situado en una banda con lados paralelos a través de p y q . Esto significa que los puntos p y q son puntos antipodales de M . ■

LEMA 2.1.2

Sea $G \subset \mathbb{R}^2$ una banda con lados paralelos K_1 y K_2 . Luego sean $a \in K_1$, $b \in K_2$, $c \in G$, $e \in \text{int} G$ donde c y e están situados en un semiplano abierto cuya frontera es la línea ab . Entonces no existe una banda $H \subset \mathbb{R}^2$ con lados paralelos L_1 , L_2 tal que $c \in L_1$, $e \in L_2$ y $a, b \in H$.

Demostración:

Introduzcamos un sistema de coordenadas x, y con origen en el punto a tal que K_1 es el eje x y el rayo emanado de a que pasa por b es la parte positiva del eje y .

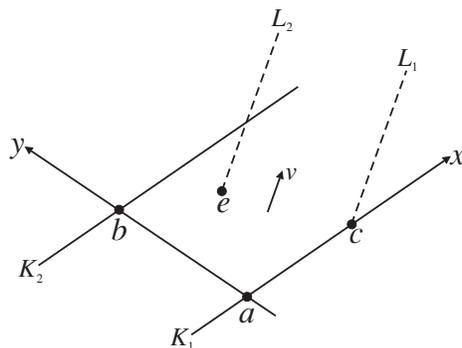


Figura 2.4:

Podemos suponer que c y e tienen el valor de su abscisa positiva (véase figura 2.4). Supongamos que la banda H existe y denotemos por v un vector con el valor de su abscisa positiva que es paralelo a L_1 y (y por lo tanto a L_2). Ya que $a \in H$, la ordenada y_v del vector v es no negativa; de manera similar, al considerar que $b \in H$, el valor y_v de la ordenada del vector v es no positiva. Por lo tanto $y_v = 0$. Pero en este caso la banda H no puede contener a los puntos a y b ya que $e \in \text{int} G$. Así, no existe tal banda H . ■

LEMA 2.1.3

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo con $\varrho_{\text{máx}}(M) = 5$. Supongamos que $F = \{a, b, c, d, e\}$ es un sistema de fijación primitivo para M donde los puntos a, b, c, d, e están colocados en orden cíclico en la frontera de M . Entonces el pentágono $P = \text{conv} F$ no es aplanable.

Demostración:

Supongamos que dos vértices vecinos de P son puntos antipodales, esto implica que P tiene, esencialmente, la forma como en las figuras 2.2(a) y 2.2(b). En el caso de la figura 2.2(a) hay tres vértices de P dentro de una banda con frontera a través de los puntos a y b . En este caso, por el lema 2.1.2, c y e no pueden ser puntos antipodales de M , contradiciendo el lema 2.1.1. En el caso de la figura 2.2(b), por el lema 2.1.1, los puntos c y e son puntos antipodales, y por esto, M está situada en la banda cuya frontera son las líneas bc y ae . Por lo tanto, el vector $v = c - b$ no ilumina a ninguno de los puntos de F , contradiciendo el teorema 1.1.5. Por lo anterior concluimos que el pentágono P no es aplanable. ■

LEMA 2.1.4

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Supongamos que existen dos segmentos paralelos I_1, I_2 en su frontera tales que $0 < l(I_1) \leq l(I_2)$ donde la función l es la longitud del segmento. Si existe una cuerda I de M paralela a I_1, I_2 tal que $l(I) > l(I_2)$ entonces $\varrho_{\max}(M) \geq 4$.

Demostración:

Sea $[a, b]$ una cuerda de M paralela a I_1 y que tiene la longitud máxima entre las longitudes de todas las cuerdas de M paralelas a I_1 . Entonces hay dos líneas soporte m_1, m_2 de M que pasan por a y b , respectivamente (véase figura 2.5). Sean c y d puntos del interior relativo de I_1 y I_2 , respectivamente. Entonces $F = \{a, b, c, d\}$ es un sistema de fijación primitivo para M , esto es, $\varrho_{\max}(M) \geq 4$. ■

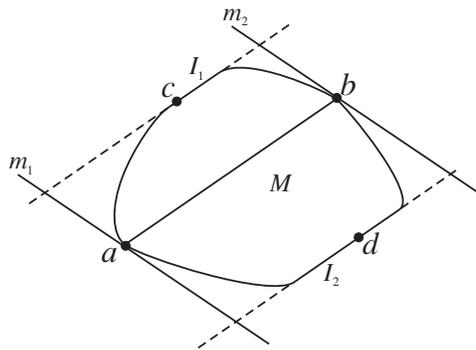


Figura 2.5:

LEMA 2.1.5

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Supongamos que existe un segmento $[a, b] \subset \text{bd} M$ tal que a y b son puntos frontera de M que son puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales de M . Entonces $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$.

Demostración:

Sean l y m dos líneas soporte paralelas de M a través de a y b , respectivamente. Como a y b son puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales de M , podemos suponer que l tiene sólo un punto en común con M . Denotemos por p el vector unitario que es paralelo a l e ilumina a los puntos del interior relativo del segmento $[a, b]$ (véase figura 2.6). Además sea n la línea soporte de M paralela al segmento $[a, b]$ y denotemos por q al vector unitario tal que $b = a + \lambda q$ con $\lambda > 0$. Sea $g \subset \text{bd} M$ el arco abierto que consiste de todos los puntos que son iluminados por el vector q . Los puntos extremos de g son el punto a y el punto $c \in n$. De manera análoga, denotemos por $h \subset \text{bd} M$ el arco abierto que consiste de todos los puntos que son iluminados por el vector $-q$. Los puntos extremos de h son el punto b y el punto $d \in n$ (notemos que es posible que los puntos c y d coincidan).

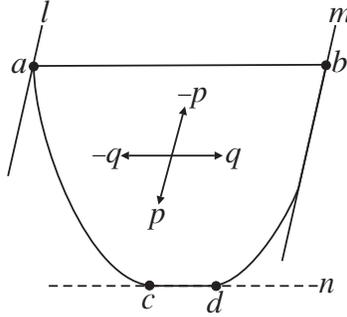


Figura 2.6:

Sea ahora F un sistema de fijación primitivo de M . Entonces existe un punto x en el interior relativo del segmento $[a, b]$ que pertenece a F , en caso contrario el vector p no ilumina a ninguno de los puntos de F . Además existe un punto $y \in F$ que pertenece al arco abierto g , en caso contrario el vector q no ilumina a ningún punto de F . De manera análoga, existe un punto $z \in F \cap h$.

Ahora mostraremos que los puntos x, y, z forman un sistema de fijación para el conjunto M . En efecto, si un vector no cero está situado entre p y q o entre p y $-q$ entonces el ilumina al punto x . El vector $-p$ ilumina al punto y ya que el arco abierto g no tiene puntos en común con l (es decir, $y \notin l$). Además si un vector no cero está situado entre q y $-p$ el ilumina al punto y . Finalmente, si un vector no cero está situado entre $-q$ y $-p$ el ilumina al punto z . Así todo vector no cero ilumina a al menos uno de los puntos x, y, z , esto es, $\{x, y, z\}$ es un sistema de fijación contenido en F y como F es un sistema primitivo, entonces F coincide con $\{x, y, z\}$. Así, todo sistema de fijación primitivo para M consiste de tres puntos, esto es, $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. ■

LEMA 2.1.6

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Supongamos que existen tres puntos frontera a, b, c de M tales que cada dos de ellos son puntos estrictamente o semi-estrictamente antipodales de M . Entonces $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$.

Demostración:

Los puntos a, b, c dividen la frontera de M en tres arcos. Denotemos por t_{ab} el arco abierto de $\text{bd}M$ con puntos extremos a y b que no contiene al punto c . De manera análoga definimos los arcos t_{bc} y t_{ca} . Si al menos uno de los segmentos $[a, b]$, $[b, c]$ o $[c, a]$ está contenido en $\text{bd}M$ entonces por el lema 2.1.6 concluimos que $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. Entonces podemos suponer que ninguno de estos segmentos está contenido en la frontera de M . Como a y b son puntos estrictamente o semi-estrictamente antipodales de M entonces existen dos líneas soporte paralelas l_a, l_b de M con $a \in l_a, b \in l_b$ tales que al menos una de estas líneas tiene sólo un punto en común con M . Por la suposición tenemos que $c \notin l_a, c \notin l_b$. Sea v_c el vector unitario que es paralelo a l_a (y por lo tanto a l_b) que ilumina al arco t_{ab} . Entonces el vector opuesto $-v_c$ ilumina al punto c y a al menos uno de los arcos t_{bc}, t_{ca} (en detalle, si la línea l_a tiene sólo al punto a en común con M , entonces $-v_c$ ilumina al arco t_{ca} y análogamente para el arco t_{bc}). De manera similar definimos al vector v_a y al vector v_b (véase figura 2.7). Entonces cada uno de los vectores $v_a, v_b, v_c, -v_a, -v_b, -v_c$ ilumina a al menos uno de los arcos t_{ab}, t_{bc}, t_{ca} .

Si un vector no cero p está situado entre v_a y $-v_c$ (sin incluirlos), entonces p ilumina al arco t_{bc} (podemos hacer un razonamiento análogo cuando el vector p está situado en el interior de los otros cinco ángulos). Así, cada vector no cero ilumina a al menos uno de los arcos t_{ab}, t_{bc}, t_{ca} .

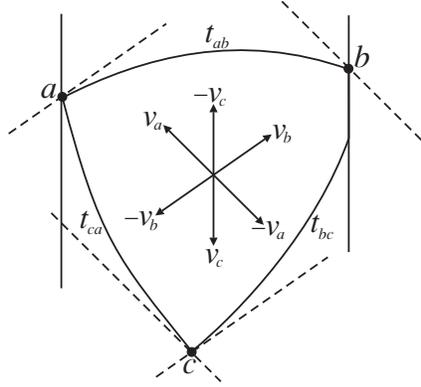


Figura 2.7:

Sea ahora F un sistema de fijación primitivo para M . Como el vector v_a ilumina sólo a los puntos del arco abierto t_{bc} entonces el conjunto $t_{bc} \cap F$ es no vacío. Elegimos un punto arbitrario \bar{a} de $t_{bc} \cap F$ de manera similar elegimos puntos $\bar{b} \in t_{ca} \cap F$ y $\bar{c} \in t_{ab} \cap F$. Como cada vector no cero ilumina a al menos uno de los arcos t_{ab} , t_{bc} , t_{ca} (y por lo tanto ilumina a al menos uno de los puntos \bar{a} , \bar{b} , \bar{c}) tenemos que $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ forman un sistema de fijación para M y como F es un sistema de fijación primitivo, entonces F coincide con $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Así todo sistema de fijación primitivo para M consiste de tres puntos, esto es, $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. ■

Ahora ya estamos en la posibilidad de probar los siguientes dos teoremas que fueron dados en la sección 1.1 y que son necesarios para la clasificación que se dará en esta sección.

TEOREMA 2.1.1 (L. FEJES TÓTH)

Para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ el entero $\varrho_{\text{máx}}(M)$ satisface la desigualdad $\varrho_{\text{máx}}(M) \leq 6$.

Demostración:

Supongamos que tenemos un sistema de fijación primitivo $F \subset \text{bd } M$ de M que consiste de siete puntos (el caso cuando son más se prueba de manera análoga) y sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ los vértices, en orden cíclico, del polígono $P = \text{conv } F$ (véase figura 2.8).

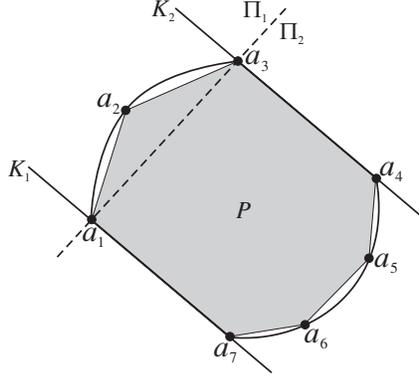


Figura 2.8:

Por el lema 2.1.1 a_1 y a_3 son puntos antipodales de M . Sea $G \supset M$ una banda con lados paralelos K_1 y K_2 tales que $a_1 \in K_1$ y $a_3 \in K_2$. El punto a_2 está situado en el semiplano abierto Π_1 con frontera la línea a_1a_3 y los puntos a_4, a_5, a_6 y a_7 están situados en el semiplano abierto opuesto Π_2 . Es posible que $a_7 \in K_1$ y $a_4 \in K_2$, pero los puntos a_5, a_6 están situados en el conjunto abierto $\Pi_2 \cap G$. Entonces a_4 y a_6 son vértices no vecinos de P situados en Π_2 y por el lema 2.1.1 ellos son puntos antipodales de M . Esto significa que existe una banda $H \supset M$ con líneas frontera a través de a_4 y a_6 , contradiciendo el lema 2.1.2. Por lo tanto, $\varrho_{\max}(M) \leq 6$ ■

TEOREMA 2.1.2 (FUDALI)

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. La igualdad $\varrho_{\max}(M) = 6$ se cumple, si y sólo si, M es un hexágono tal que cada par de sus lados opuestos son paralelos.

Demostración:

Sea $\varrho_{\max}(M) = 6$. Supongamos que F es un sistema de fijación para M que consiste de seis puntos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ en orden cíclico. Sea $G \supset M$ una banda con líneas frontera K_1, K_2 a través de los puntos antipodales a_1 y a_3 , respectivamente. Si dos de los puntos a_4, a_5, a_6 están situados en el interior de G obtenemos una contradicción como en la demostración del teorema anterior. Por lo tanto a_6 y a_4 están situados en las líneas K_1 y K_2 , respectivamente. En otras palabras, los segmentos $[a_1, a_6]$ y $[a_3, a_4]$ están situados en la frontera de M . Análogamente, cualesquiera dos lados opuestos de $P = \text{conv } F$ están contenidos en la frontera de M , es decir, $M = P$ es un hexágono con lados opuestos paralelos (y el sistema de fijación primitivo F para M es el conjunto de sus vértices).

Recíprocamente, si M es un hexágono con lados opuestos paralelos, el conjunto de sus vértices forman un sistema de fijación para el conjunto M y por lo tanto $\varrho_{\text{máx}}(M) = 6$. ■

TEOREMA 2.1.3

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo tal que $\varrho_{\text{máx}}(M) < 6$. La igualdad $\varrho_{\text{máx}}(M) = 5$ se cumple, si y sólo si, existe un péntago convexo no aplanable P inscrito a M tal que cada dos vértices no vecinos de P son puntos antipodales de M .

Demostración:

La parte “sólo si” es consecuencia de los lemas 2.1.1 y 2.1.3.

Ahora probaremos la parte “si”. Sea P un péntago no aplanable inscrito en M tal que cada dos vértices no vecinos de P son puntos antipodales de M . Al conjunto de vértices de P lo denotaremos por F . Entonces cada dirección ilumina a al menos uno de los puntos de $F \subset \text{bd } M$ y por esto F es un sistema de fijación para M . Luego sea a un punto arbitrario de F y b, e los vértices de P que son vecinos de a . Entonces b y e son puntos antipodales de M , esto es, existe una banda $K \supset M$ con líneas frontera paralelas a través de b y e . Entonces existe una dirección que ilumina sólo al punto $a \in F$. Análogamente para cada uno de los otros puntos de F . Así el sistema de fijación F para M es primitivo. ■

En el teorema anterior requerimos que se cumpla que $\varrho_{\text{máx}}(M) < 6$. Aparentemente esta condición está de más, pero como veremos en el siguiente ejemplo, es una condición esencial.

EJEMPLO 2.1.1

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ el hexágono regular con vértices a, b, c, d, e, f en orden cíclico y sea p un punto relativamente interior del segmento $[e, f]$. Entonces $P = \text{conv} \{a, b, c, d, p\}$ es un péntago no aplanable inscrito en M y satisface la condición del teorema 2.1.3. Sin embargo $\varrho_{\text{máx}}(M) = 6$, esto es, la conclusión del teorema 2.1.3 no se cumple. Sea ahora Π un semiplano cerrado tal que $\{a, b, c, d, e, p\} \subset \text{int } \Pi$ y $f \notin \Pi$ (véase figura 2.9). Entonces $M' = M \cap \Pi$ es un cuerpo compacto convexo con $\varrho_{\text{máx}}(M') = 5$ ya que P es un péntago inscrito en M' que satisface la condición del teorema 2.1.3 y además $\varrho_{\text{máx}}(M') < 6$ por el teorema 2.1.2. Esto muestra que la desigualdad $\varrho_{\text{máx}}(M) < 6$ es esencial en el teorema anterior.

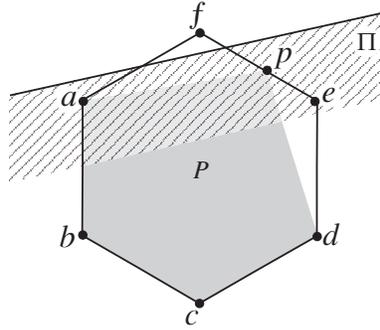


Figura 2.9:

TEOREMA 2.1.4

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. La igualdad $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$ se cumple, si y sólo si, M satisface al menos una de las condiciones siguientes:

- (i) Existen tres puntos frontera de M tales que cada dos de ellos son puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales para M .
- (ii) Existe un segmento $[a, b] \subset \text{bd } M$ tal que los puntos a y b son puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales para M .

Demostración:

La parte “si” es consecuencia inmediata de los lemas 2.1.5 y 2.1.6.

Daremos la prueba de la parte “sólo si”. Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo con $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. Entonces el cuerpo M tiene al menos un punto frontera no regular (en caso contrario $\varrho_{\text{máx}}(M) = 4$). Sea a un punto frontera no regular de M con el mayor ángulo exterior (en caso de haber varios considerar cualquiera de ellos). Denotemos por l_1 y l_2 los rayos tangentes a M en el punto a y por m_1, m_2 las líneas soporte de M paralelas a l_1 y l_2 respectivamente. Por b, c, d denotemos a los puntos $l_1 \cap m_2, m_1 \cap m_2$ y $l_2 \cap m_1$ respectivamente. Entonces $abcd$ es un paralelogramo circunscrito a M . Ahora consideremos todos los casos posibles.

Caso 1: al menos uno de los puntos b, d pertenece a M . Podemos suponer que $b \in M$. Entonces a y b son puntos antipodales de M . Si ellos son estrictamente o semiestrictamente antipodales, entonces M satisface la condición (ii) de este teorema. Supongamos que a y b no son puntos estrictamente ni semiestrictamente antipodales de M . Entonces al menos uno de los puntos c, d pertenece a M (en caso contrario tenemos que $\varrho_{\max}(M) = 4$, por el lema 2.1.4). Sea $c \in M$, esto es, b y c son puntos antipodales. Si ellos son estrictamente o semiestrictamente antipodales, entonces M satisface la condición (ii) de este teorema. Queda por considerar el caso cuando b y c no son puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales de M . Entonces existen puntos $z \in [c, d]$ y $w \in [a, d]$ distintos de c y a que pertenecen a M . En consecuencia los puntos x, y, z, w (como en la figura 2.10) forman un sistema de fijación primitivo para M , en contradicción con la hipótesis de que $\varrho_{\max}(M) = 3$. Vemos que b y c son puntos semiestrictamente antipodales de M y por lo tanto M satisface la condición (ii) de este teorema. Así si $b \in M$ entonces este teorema se cumple. Análogamente si $d \in M$ este teorema se cumple.

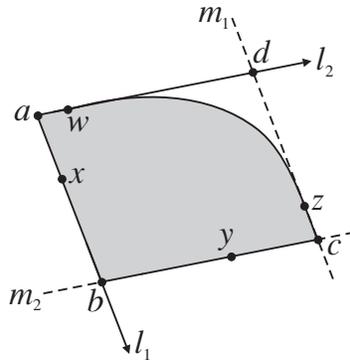


Figura 2.10:

Caso 2: Supongamos que ninguno de los puntos b, d pertenecen a M y además a y c son los únicos puntos en común de M y la frontera del paralelogramo $abcd$. Denotemos por l'_1 y l'_2 los rayos tangentes a M en el punto c . Entonces $l'_1 \subset m_1$ y $l'_2 \subset m_2$ (en caso contrario el ángulo exterior de M en el punto c es mayor que el ángulo exterior en el punto a en contradicción con la elección del punto a). Sea P un paralelogramo circscrito a M que contiene los puntos a y c en su interior y sean x, y, z, w puntos en común de M con la frontera de P (véase figura 2.11).

Podemos suponer que P está suficientemente cerca de $abcd$ de manera que los puntos x y w son iluminados por el vector $c - a$ y los puntos y y z son iluminados por el vector $a - c$ (observemos que el conjunto de todas las direcciones para las cuales hay una línea soporte que tiene un segmento en común con M es a lo más contable. Por esto podemos suponer que cada lado de P tiene sólo un punto en común con M). El conjunto $F = \{x, y, z, w\}$ es un sistema de fijación para M . Además este sistema de fijación es primitivo (ya que cada lado de P contiene un único punto que pertenece a F). Así tenemos un sistema de fijación primitivo que consiste de cuatro puntos en contradicción con la hipótesis de que $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. Así, el caso 2 no es realizable.

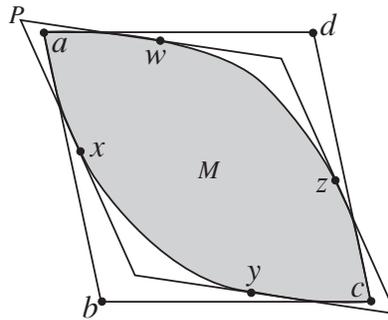


Figura 2.11:

Caso 3: ninguno de los puntos a, b pertenece a M , además $c \in M$ y M tiene un segmento en común con el paralelogramo $abcd$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el lado $[a, b]$ tiene un segmento $[a, x]$ en común con la frontera de M . Sea P el paralelogramo circunscrito a M que contiene a los puntos a, c en su interior y x', y, z, w son puntos en común de M con la frontera de P (véase figura 2.12). Observemos que el punto x' puede coincidir con x o ser diferente de x . Como en el caso anterior, el conjunto $\{x', y, z, w\}$ forma un sistema de fijación primitivo para M , en contradicción con la hipótesis de que $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. Así el caso 3 no es realizable.

Caso 4: $b \notin M, d \notin M, c \in M$ y además M tiene más que un segmento en común con la frontera del paralelogramo $abcd$. Por el lema 2.1.4 tenemos que M no puede tener dos segmentos en común con dos lados opuestos de $abcd$. Supongamos que el lado $[a, b]$ tiene un segmento $[a, x]$ en común con la frontera del paralelogramos $abcd$ y además $[a, d]$ o $[b, c]$ tiene un segmento en común con la frontera de $abcd$. Como antes, construimos un sistema de fijación primitivo para M que consta de 4 puntos, en contradicción con la hipótesis $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. Así el caso 4 no es realizable.

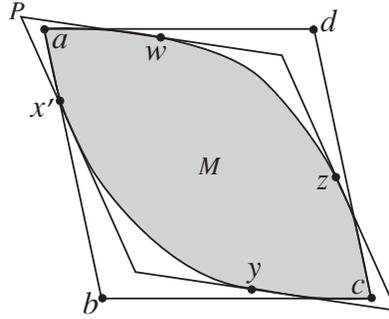


Figura 2.12:

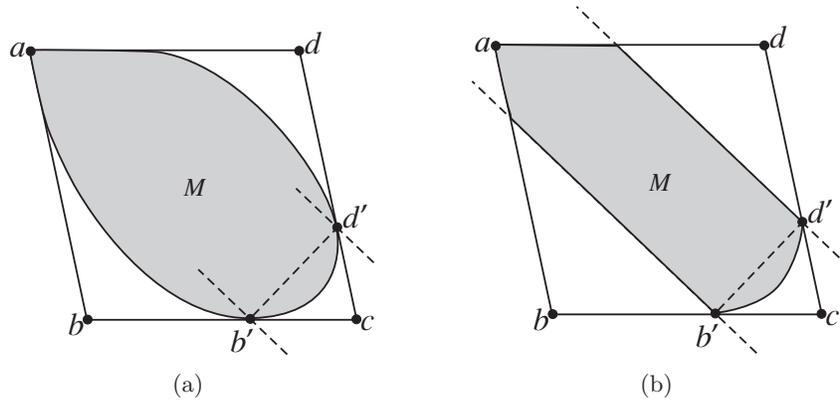


Figura 2.13:

Caso 5: ninguno de los puntos b, c, d pertenece a M . Denotemos por b' el punto del conjunto $m_2 \cap M$ que está más cerca a c y por d' el punto del conjunto $m_1 \cap M$ que está más cerca a c . Si b' y d' no son puntos antipodales de M (véase figura 2.13(a)). Entonces es posible construir un sistema de fijación primitivo para M que consta de 4 puntos (con la ayuda de un paralelogramo circunscrito a P) como en los casos anteriores, esto es, $\rho_{\max}(M) \geq 4$ en contradicción con la hipótesis. Sin embargo si b' y d' son puntos antipodales de M , pero no son ni puntos estrictamente ni puntos semiestrictamente antipodales (véase figura 2.13(b)) entonces $\rho_{\max}(M) \geq 4$ por el resultado del lema 2.1.4, esto es, obtenemos una contradicción a la hipótesis. Entonces b' y d' deben de ser puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales.

Además a y b' son puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales y análogamente a y d' también son puntos estrictamente o semiestrictamente antipodales. Así los puntos a, b', d' satisfacen la condición (i) de este teorema. ■

Los dos teoremas anteriores nos completan la clasificación de los cuerpos compactos convexos $M \subset \mathbb{R}^2$ con respecto a la cardinalidad máxima de sus sistemas de fijación primitivos (ya que $\varrho_{\text{máx}}(M) = 4$, si y sólo si, ninguno de los teoremas 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 se cumplen).

Ahora daremos unos ejemplos donde aplicamos los teoremas anteriores.

EJEMPLO 2.1.2

Sea M el triángulo de Reauleaux (véase figura 2.14(a)). Cada dos de sus *vértices* a, b, c son puntos estrictamente antipodales de M . El teorema 2.1.4 muestra que $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. Si Π es un semiplano cerrado que contiene a los puntos a, b, c en su interior, pero no contiene a M (véase figura 2.14(b)), entonces $M' = M \cap \Pi$ es otra figura con $\varrho_{\text{máx}}(M') = 3$ (también por el teorema 2.1.4). Pero si cortamos el punto c por una línea paralela a bd Π (véase figura 2.14(c)), entonces obtenemos, por el lema 2.1.4 (o aplicando los teoremas 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4), la figura N con $\varrho_{\text{máx}}(M) = 4$.

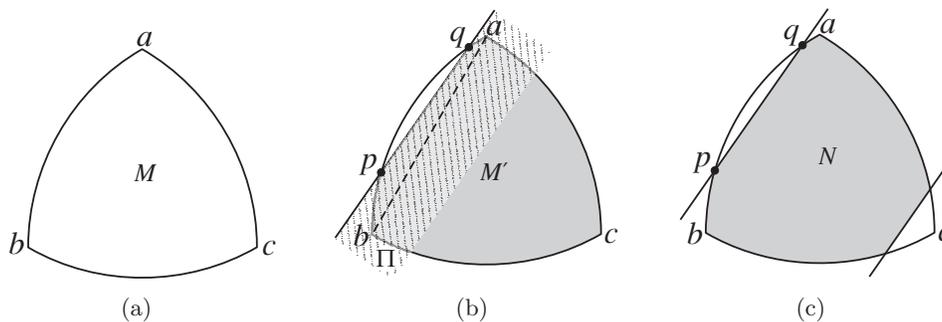


Figura 2.14:

EJEMPLO 2.1.3

Sea $N \subset \mathbb{R}^2$ un semicírculo con diámetro $[a, m]$. Entonces por el teorema 2.1.4 tenemos que $\varrho_{\text{máx}}(N) = 3$. Sea ahora b un punto relativamente interior del segmento $[a, m]$. Denotemos por l la línea a través de b que es perpendicular al segmento $[a, m]$. Denotemos por Π el semiplano cerrado con línea frontera l tal que $a \in \Pi$ y sea $M = N \cap \Pi$ (véase figura 2.15). Entonces $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$ por el teorema 2.1.4 (ya que el segmento $[a, b]$ está contenido en $\text{bd } M$ y a y b son puntos semiestrictamente antipodales de M).

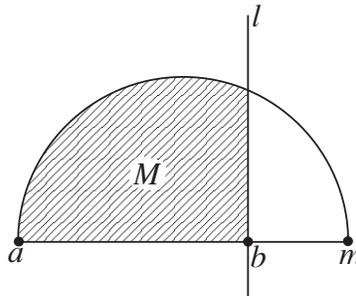


Figura 2.15:

EJEMPLO 2.1.4

Para el cuerpo $M \subset \mathbb{R}^2$ de la figura 2.16 tenemos que $\varrho_{\text{máx}}(M) = 5$ ya que el pentágono inscrito P con vértices a, b, c, d, e satisface las condiciones del teorema 2.1.3.

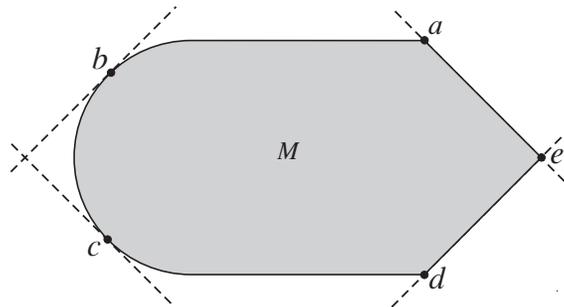


Figura 2.16:

Concluimos esta sección con unos teoremas que dan una subclasificación para dos familias interesantes de figuras planas: los cuerpos de ancho constante y los polígonos regulares.

TEOREMA 2.1.5

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una figura de ancho constante. Entonces

$$\varrho_{\max}(M) = \begin{cases} 3 & \text{si } M \text{ es el triángulo de Reauleux,} \\ 5 & \text{si } M \text{ es un pentágono de Reauleux,} \\ 4 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Demostración:

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una figura de ancho constante h . Si b y c son puntos antipodales de M entonces ellos son estrictamente antipodales y el segmento $[b, c]$ tiene longitud h . Luego sean a, p, q tres puntos frontera de M tales que a y p son puntos antipodales y a, q son puntos antipodales también. Entonces cada uno de los segmentos $[a, p]$ y $[a, q]$ tiene longitud h y el arco frontera pq de M (que no contiene al punto a) es un arco circular de radio h . Ahora, por el teorema 2.1.4, si $\varrho_{\max}(M) = 3$, entonces M es el triángulo de Reauleux, esto es, cada uno de los segmentos $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ (véase figura 2.17(a)) tiene longitud h y cada arco ab , bc , ca es un arco circular de radio h .

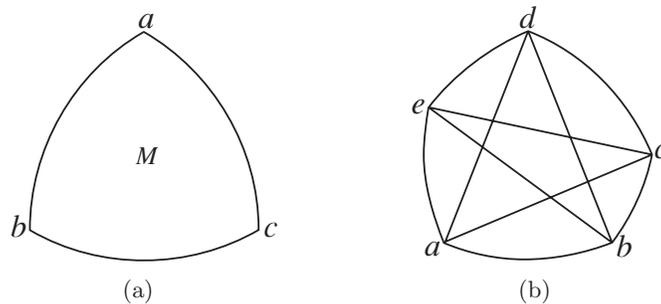


Figura 2.17:

Luego, si $\varrho_{\max}(M) = 5$ y $P = \text{conv}\{a, b, c, d, e\}$ es un pentágono inscrito a M , como en el teorema 2.1.3, entonces cada diagonal de P tiene longitud h y cada arco frontera ab, bc, cd, de, ea de M es un arco circular de radio h . Esto significa que M es un pentágono de Reuleaux de ancho constante h (véase figura 2.17(b)). Sin embargo si el cuerpo $M \subset \mathbb{R}^2$ es una figura de ancho constante h distinta de las dos figuras consideradas entonces $\varrho_{\max}(M) = 4$ (ya que la igualdad $\varrho_{\max}(M) = 6$ no se cumple por el teorema 2.1.2). ■

En particular, si M_m es un *polígono de Reuleaux* con m vértices, la gráfica de la función $\varrho_{\max}(M_m)$ aparece en la figura 2.18

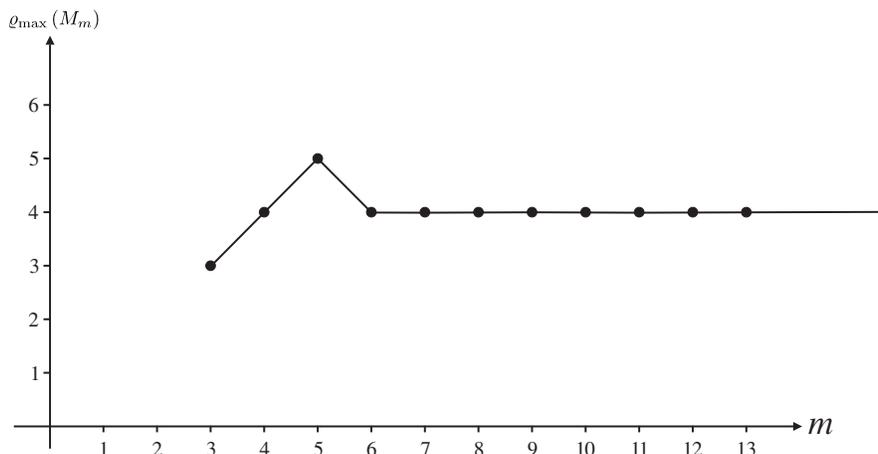


Figura 2.18:

TEOREMA 2.1.6

Sea M_k un polígono regular de k lados. Entonces

$$\varrho_{\max}(M_k) = \begin{cases} 3 & \text{si } k = 3, \\ 4 & \text{si } k = 4, 7, 9 \text{ o } k > 10, \\ 5 & \text{si } k = 5, 8, 10, \\ 6 & \text{si } k = 6. \end{cases}$$

Demostración:

Sea $M_k \subset \mathbb{R}^2$ un polígono regular con $k = 2n + 1$ vértices donde $n > 2$. Por el teorema 2.1.2 tenemos que $\varrho_{\max}(M_k) < 6$. Supongamos que $\varrho_{\max}(M_k) = 5$.

Entonces existe un pentágono no aplanable P inscrito en M_k como en el teorema 2.1.3. Sean a, b, c, d, e los vértices de P en orden cíclico. Denotemos por q al centro de M_k . Como a y c son puntos antipodales de M_k existen dos líneas soporte paralelas l_a, l_c de M_k tales que $a \in l_a$ y $c \in l_c$. Es posible que un lado de M_k esté situado en l_a o en l_c pero $2n$ (o los $2n + 1$) lados están situados en la banda entre l_a y l_c . Más detalladamente, n (o $n + 1$) de los lados de M_k están situados en un semiplano con frontera la línea ac y también n (o $n + 1$) de ellos están situados en el otro semiplano. Esto implica que el ángulo entre los vectores $a - q$ y $c - q$ no es menor de $\frac{n}{2n+1} \cdot 2\pi$. Análogamente el ángulo entre $a - q$ y $d - q$ no es menor de $\frac{n}{2n+1} \cdot 2\pi$. Entonces el ángulo entre $c - q$ y $d - q$ no es mayor de $\frac{1}{2n+1} \cdot 2\pi$, esto es, cada lado de P es visible bajo un ángulo no mayor de $\frac{1}{2n+1} \cdot 2\pi$ desde el punto q . En consecuencia la cuerda $[a, c]$ es visible bajo un ángulo no mayor de $\frac{2}{2n+1} \cdot 2\pi$ desde el punto q . Por esto el ángulo α entre los vectores $a - q$ y $c - q$ no es mayor que $\frac{2}{2n+1} \cdot 2\pi$. Así

$$\frac{2}{2n+1} \cdot 2\pi \geq \alpha \geq \frac{n}{2n+1} \cdot 2\pi,$$

en contradicción de que $n > 2$. Esta contradicción muestra que para cualquier número impar $k > 5$ tenemos que $\varrho_{\max}(M_k) \neq 5$.

Análogamente concluimos que $\varrho_{\max}(M) \neq 3$. Así, $\varrho_{\max}(M_k) = 4$ cuando $n > 2$.

Supongamos ahora que $M_k \subset \mathbb{R}^2$ es un polígono regular con $k = 2n$ vértices. Luego $\varrho_{\max}(M_k) < 6$. Supongamos que $\varrho_{\max}(M_k) = 5$. Entonces existe un pentágono no aplanable P inscrito en M_k como en el teorema 2.1.3. Sean a, b, c, d, e los vértices de P en orden cíclico. Denotemos por q al centro de M_k . Como a y c son puntos antipodales de M_k entonces existen dos líneas soporte paralelas l_a, l_c de M_k tales que $a \in l_a$ y $c \in l_c$. Es posible que dos lados opuestos de M_k estén situados en $l_a \cup l_b$, pero $2n - 2$ (o $2n$) lados están situados en la banda entre l_a y l_c . Más detalladamente, $n - 1$ (o n) de los lados de M_k están situados en un semiplano con frontera la línea ac y también $n - 1$ (o n) de ellos están situados en el otro semiplano. Esto implica que el ángulo entre los vectores $a - q$ y $c - q$ no es menor de $\frac{n-1}{2n} \cdot 2\pi$. Análogamente el ángulo entre $a - q$ y $d - q$ no es menor de $\frac{n-1}{2n} \cdot 2\pi$. Entonces el ángulo entre $c - q$ y $d - q$ no es mayor de $\frac{2}{2n} \cdot 2\pi$, esto es, cada lado de P es visible bajo un ángulo no mayor de $\frac{2}{2n} \cdot 2\pi$ desde el punto q . En consecuencia la cuerda $[a, c]$ es visible bajo un ángulo no mayor de $\frac{4}{2n} \cdot 2\pi$ desde el punto q . Por esto el ángulo β entre los vectores $a - q$ y $c - q$ no es mayor que $\frac{4}{2n} \cdot 2\pi$.

Así

$$\frac{4}{2n} \cdot 2\pi \geq \beta \geq \frac{n-1}{2n} \cdot 2\pi,$$

y por lo tanto $n \leq 5$, esto es, $k \leq 10$.

Análogamente concluimos que $\varrho_{\max}(M) \neq 3$ para $k > 3$. Así, cuando $k > 10$ tenemos que $\varrho_{\max}(M_k) = 4$.

De los resultados de arriba tenemos que

$$\varrho_{\max}(M_7) = 4, \varrho_{\max}(M_9) = 4, \text{ y } \varrho_{\max}(M_k) = 4 \text{ cuando } k > 10.$$

Queda por considerar el valor de $\varrho_{\max}(M_k)$ para $k = 3, 4, 5, 6, 8, 10$. Es fácil ver que $\varrho_{\max}(M_k) = k$ para $k = 3, 4, 5, 6$.

Ahora sean a_1, a_2, \dots, a_{10} los vértices del polígono M_{10} en orden cíclico. Entonces $P = \text{conv}\{a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}\}$ es un pentágono no aplanable inscrito en M_{10} que satisface la condición del teorema 2.1.3 por lo que $\varrho_{\max}(M_{10}) = 5$.

Finalmente sean a_1, a_2, \dots, a_8 los vértices, en orden cíclico, del polígono M_8 . Como $P = \text{conv}\{a_2, a_4, a_5, a_7, a_8\}$ es un pentágono no aplanable inscrito en M_8 que satisface la condición del teorema 2.1.3, entonces tenemos que $\varrho_{\max}(M_8) = 5$. ■

En particular, si M_k es un polígono regular con k aristas, la gráfica de la función $\varrho_{\max}(M_k)$ aparece en la figura 2.19.

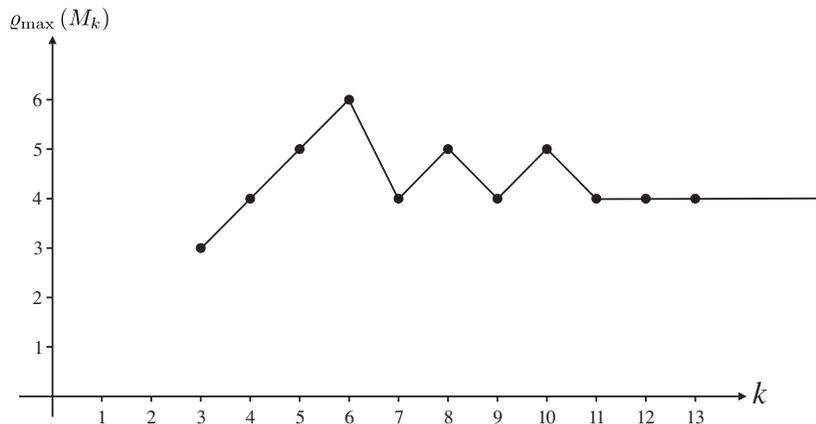


Figura 2.19:

CAPÍTULO 3

Nuevos Resultados: Sistemas de Detención

3.1. Clasificación por Sistemas de Detención

Regresaremos al plano \mathbb{R}^2 . De los resultados de P. Mani concluimos que para cada cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ tenemos que $3 \leq \sigma_{\text{máx}}(M) \leq 5$. Para obtener una clasificación completa de las figuras compactas convexas en el plano es necesario describir todas las figuras para las cuales $\sigma_{\text{máx}}(M) = 3, 4, 5$. Esto fue hecho en el artículo de Boltyanski y González-Aguilar [6]. En lo que resta de esta sección presentaremos esta clasificación.

LEMA 3.1.1

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo y F un sistema de detención primitivo para M con al menos tres puntos. Entonces cualesquiera tres puntos de F no son colineales y, por lo tanto, F es el conjunto de vértices de un polígono P inscrito en M .

Demostración:

Supongamos que hay tres puntos a, b, c de F colineales en la frontera de M . Entonces $a, b, c \in l \cap \text{bd } M$ donde l es una línea soporte de M . Podemos suponer que el punto b está situado entre a y c . Si el punto a es sostenido por la dirección de un vector $v \neq 0$ entonces también el punto b es sostenido por la dirección de este vector v . Esto es, no existe un vector no cero que sostenga sólo al punto $a \in F$. Entonces $F \setminus \{a\}$ es un sistema de detención para M , contradiciendo que F es un sistema de detención primitivo para M . ■

LEMA 3.1.2

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo con $\sigma_{\text{máx}}(M) = 5$ y F un sistema de detención primitivo para M de cardinalidad 5. Si p y q son vértices no vecinos del pentágono $P = \text{conv } F$ entonces ellos son puntos estrictamente antipodales de M .

Demostración:

Los puntos p y q dividen la frontera de M en dos arcos abiertos A y B . Como p y q no son vértices vecinos, podemos suponer que el arco A contiene a un solo punto a de F distinto de p y de q y por lo tanto el arco B contiene a dos puntos b, c de F distintos de p y de q . Denotemos por r_p y r_q los rayos que emanan de p y q , respectivamente, que son tangentes a B y por \bar{r}_p, \bar{r}_q los rayos opuestos. Si \bar{r}_p y \bar{r}_q tienen un punto en común (véase figura 3.1(a)) entonces es imposible sostener sólo al punto $a \in F$, contradiciendo que F es un sistema de detención primitivo para M . Entonces $\bar{r}_p \cap \bar{r}_q = \emptyset$, es decir, el arco B está situado en una semi-banda S cuya frontera son rayos paralelos a través de los puntos p y q (véase figura 3.1(b)).

Por otro lado, podemos elegir esta semibanda de manera que ninguna de las intersecciones de sus rayos frontera con el arco B sea un segmento, en caso contrario sería imposible sostener sólo al punto $a \in F$ contradiciendo de nuevo que F es un sistema de detención primitivo. Análogamente el arco A está situado en una semibanda T con sus rayos frontera paralelos a través de los puntos p y q tal que ninguna de las intersecciones de estos rayos con el arco A es un segmento.

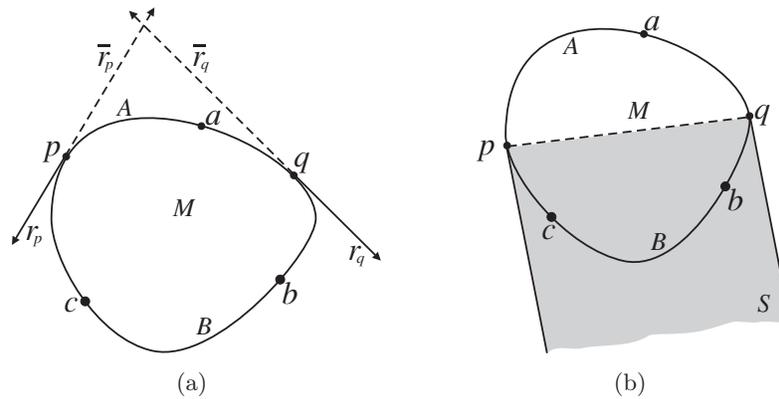


Figura 3.1:

Si las semibandas S y T forman una banda, entonces los puntos p y q son puntos estrictamente antipodales de M . Supongamos ahora que $S \cup T$ es un conjunto no convexo, digamos que q no es un punto frontera de $\text{conv}(S \cup T)$ (véase figura 3.2).

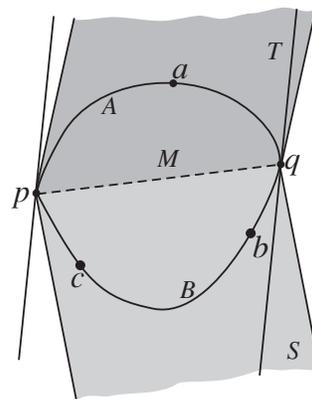


Figura 3.2:

Hay dos casos posibles:

- (i) El punto q no es punto frontera regular de M .

En este caso los puntos p y q serían de nuevo puntos estrictamente antipodales de M .

(ii) El punto q es un punto regular de M .

En este caso p y q son puntos antipodales de M , pero no estrictamente antipodales.

En cualquiera de los dos casos dos vértices no vecinos de P son puntos antipodales de M .

Veamos que el caso (ii) no es realizable. Consideremos el caso (ii) y supongamos que c y q son dos vértices no vecinos de P . Denotemos por l la línea soporte de M a través del punto q . Es fácil ver que la línea l' que pasa por c y es paralela a la línea l no es una línea soporte de M . Por lo tanto los dos vértices no vecinos c y q no son puntos antipodales de M , contradiciendo la afirmación de arriba. Así el caso (ii) es imposible y por lo tanto p y q siempre son puntos estrictamente antipodales de M .

■

LEMA 3.1.3

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo y supongamos que existe un segmento $[a, b] \subset \text{bd } M$ tal que a y b son puntos estrictamente antipodales de M . Entonces $\sigma_{\text{máx}}(M) = 3$.

Demostración:

Sean l, m dos líneas soporte paralelas de M que pasan por a y b , respectivamente, tal que cada una de ellas tiene sólo un punto en común con M . Denotemos por p el vector unitario paralelo a l (y por tanto paralelo a m) que sostiene a todos los puntos del interior relativo del segmento $[a, b]$ (véase figura 3.3). Sea n una línea soporte de M paralela a ab y q un vector unitario tal que $b = a + \lambda q$ con $\lambda > 0$.

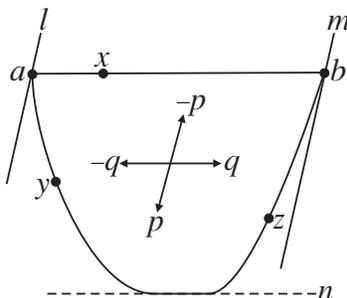


Figura 3.3:

Supongamos que existe un sistema de detención de M de cardinalidad $f \geq 4$. Entonces existe un punto $x \in F$ que pertenece al interior relativo del segmento $[a, b]$ (en caso contrario p no sostiene a ningún punto de F). Si hay un punto $u \in F \cap [a, b]$ distinto de x se contradice que F sea un sistema de detención primitivo. Entonces $F \cap [a, b] = \{x\}$. Por otro lado hay un solo punto $y \in F \setminus ([a, b] \cup n)$ que es sostenido por q (si hay dos, uno de ellos es superfluo). De manera similar, hay un solo punto $z \in F \setminus ([a, b] \cup n)$ que es sostenido por $-q$. Es fácil ver que $\{x, y, z\}$ es un sistema de detención para M , lo que contradice que $f \geq 4$. ■

LEMA 3.1.4

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo y supongamos que existen tres puntos $a, b, c \in \text{bd } M$ tal que cada dos de ellos son puntos estrictamente antipodales de M . Entonces $\sigma_{\text{máx}}(M) = 3$.

Demostación:

Denotemos por t_{ab} al arco abierto de la frontera de M con puntos extremos a y b que no contiene al punto c . Análogamente definimos los arcos abiertos t_{bc} y t_{ca} . Sean l_a y l_b dos líneas soporte paralelas de M tales que $\text{bd } M \cap l_a = \{a\}$ y $\text{bd } M \cap l_b = \{b\}$. Sea v_c un vector unitario paralelo a l_a, l_b que sostiene al arco t_{ab} . Entonces el vector opuesto $-v_c$ sostiene al punto c y a los arcos abiertos t_{bc} y t_{ca} . De manera similar definimos los vectores v_a y v_b (véase figura 3.4).

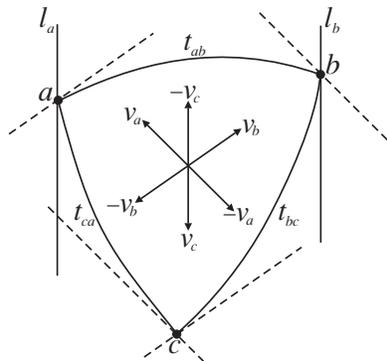


Figura 3.4:

Si un vector $p \neq 0$ está situado entre v_a y $-v_c$ entonces p sostiene al arco t_{bc} (podemos hacer un razonamiento análogo cuando el vector p está situado en el interior de los otros cinco ángulos). Entonces cada vector no cero sostiene a al menos uno de los arcos t_{ab}, t_{bc}, t_{ca} .

Ahora sea F un sistema de detención primitivo para M de cardinalidad máxima. Como el vector v_a sostiene sólo a los puntos del arco abierto t_{bc} , entonces el conjunto $t_{bc} \cap F$ es no vacío. Elijamos un punto arbitrario \bar{a} del conjunto $t_{bc} \cap F$ y de manera similar elegimos puntos $\bar{b} \in t_{ca} \cap F$ y $\bar{c} \in t_{ab} \cap F$. Los puntos \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} forman un sistema de detención para M (ya que cualquier vector no cero sostiene a al menos uno de los arcos t_{ab} , t_{bc} , t_{ca}) y como F es primitivo, el coincide con $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Por lo tanto $\varrho_{\text{máx}}(M) = 3$. ■

LEMA 3.1.5

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un polígono convexo con $\sigma_{\text{máx}}(M) = 5$. Entonces existe un sistema de detención de cardinalidad 5 que está contenido en el conjunto de vértices de M .

Demostración:

Sea $x \in F$. Por el lema 3.1.1, F es el conjunto de vértices de un pentágono inscrito a M . Sea un punto $y \in F$ tal que x y y son vértices no vecinos de P . Por el lema 3.1.2, los puntos x y y son puntos estrictamente antipodales de M y por lo tanto x pertenece al conjunto de vértices de M . ■

TEOREMA 3.1.1

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. La igualdad $\sigma_{\text{máx}}(M) = 5$ se cumple, si y sólo si, existe un pentágono convexo P inscrito en M tal que cada dos vértices no vecinos de P son puntos estrictamente antipodales de M .

Demostración:

La parte “sólo si” es consecuencia de los resultados de los lemas 3.1.1 y 3.1.2.

Ahora probaremos la parte “si”. Sea P un pentágono convexo inscrito en M tal que cada dos vértices no vecinos de P son puntos estrictamente antipodales de M . Al conjunto de vértices de P lo denotaremos por F . Entonces cada dirección sostiene a al menos uno de los puntos de $F \subset \text{bd } M$, esto es, F es un sistema de detención para M . Luego sea a un punto arbitrario de F y b , e los vértices de P que son vecinos de a . Entonces b y e son puntos estrictamente antipodales de M , esto es, existe una banda $S \supset M$ tal que sus líneas frontera paralelas a través de b y e sólo tiene en común a los puntos b y e con $\text{bd } M$. Entonces existe una dirección que sostiene sólo al punto $a \in F$. Análogamente para cada uno de los otros puntos de F . Así, el sistema de detención F para M es primitivo. ■

TEOREMA 3.1.2

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. La igualdad $\sigma_{\max}(M) = 3$ se cumple, si y sólo si, M satisface al menos una de las condiciones siguientes:

- i) Existen tres puntos frontera de M tales que cada dos de ellos son puntos estrictamente antipodales para M .
- ii) Existe un segmento $[a, b] \subset \text{bd } M$ tal que los puntos a y b son puntos estrictamente antipodales para M .

Demostración:

La parte “si” es consecuencia inmediata de los resultados de los lemas 3.1.2 y 3.1.3.

Daremos la prueba de la parte “sólo si”. Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo compacto con $\sigma_{\max}(M) = 3$. Entonces el cuerpo M tiene al menos un punto frontera no regular. Sea a un punto frontera no regular de M con el mayor ángulo exterior (en caso de haber varios considerar cualquiera de ellos). Denotemos por l_1 y l_2 los rayos tangentes a M en el punto a y por m_1, m_2 las líneas soporte de M paralelas a l_1 y l_2 respectivamente. Por b, c, d denotemos a los puntos $l_1 \cap m_2, m_1 \cap m_2$ y $l_2 \cap m_1$ respectivamente. Entonces $abcd$ es un paralelogramo circunscrito a M . Ahora consideremos todos los casos posibles.

Caso 1: los puntos a, b, c, d pertenecen a M , esto es, M coincide con el paralelogramo $abcd$. En este caso $\sigma_{\max}(M) = 4$ (el conjunto de todos sus vértices forman un sistema de detención primitivo de cardinalidad máxima) en contradicción con la hipótesis. Así este caso es imposible.

Caso 2: tres de los puntos a, b, c, d pertenecen al cuerpo M , por ejemplo, los puntos $a, b, c \in M$ (los otros casos son análogos). Denotemos por w cualquier punto de M que pertenece al interior del paralelogramo $abcd$ (véase figura 3.5) y por s la línea soporte de M a través de w . Entonces cada vector unitario situado entre p y $-q$, inclusive, sostiene a w y los otros vectores sostienen a uno de los puntos a, b, c . En consecuencia los puntos a, b, c, w forman un sistema de detención para M . Es fácil ver que este sistema es primitivo en contradicción con la hipótesis. En efecto, si, por ejemplo, eliminamos el punto c entonces el subconjunto restante $\{a, b, w\}$ no es un sistema de detención para M ya que si v es el vector de dirección de la línea s (como en la figura 3.5), entonces el vector $v - \varepsilon q$ mueve a M fuera del conjunto $\{a, b, w\}$ cuando ε es suficientemente pequeño. Así este caso tampoco es realizable.

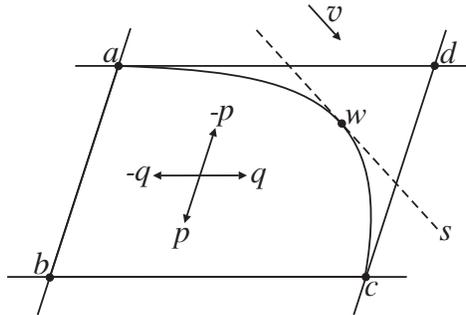


Figura 3.5:

Queda por considerar los casos cuando no más de dos puntos a, b, c, d pertenecen a M .

Caso 3: $a \in M$ y al menos uno de los puntos b, d también pertenece a M . Por ejemplo $a, b \in M$. Si a y b son puntos frontera de M estrictamente antipodales entonces M satisface la condición (ii) de este teorema. Supongamos que a y b no son puntos estrictamente antipodales de M , esto es, al menos uno de los lados $[a, d]$ o $[b, c]$ tiene un segmento en común con la frontera de M . También esto contradice a la hipótesis $\sigma_{\max}(M) = 3$ ya que los puntos a, b, x, y como en la figura 3.6 forman un sistema de detención primitivo para M .

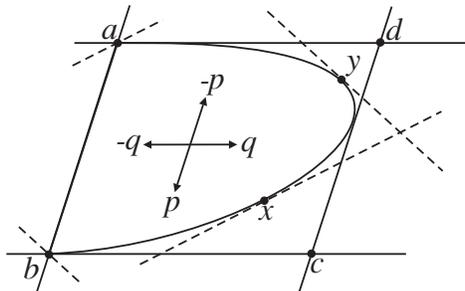


Figura 3.6:

Caso 4: $a \in M$ y $c \in M$ (véase figura 3.7). Denotemos por l'_1 y l'_2 los rayos tangentes a M en el punto c . Entonces $l'_1 \subset m_1$ y $l'_2 \subset m_2$ (en caso contrario el ángulo exterior de M en el punto c es mayor que el ángulo exterior en el punto a en contradicción con la elección del punto a). Sean n_1, n_2 dos líneas soporte paralelas de M que contienen sólo un punto x_i en común con $\text{bd } M$, $i = 1, 2$. Entonces a, c, x_1, x_2 forman un sistema de detención primitivo para M en contradicción con la hipótesis.

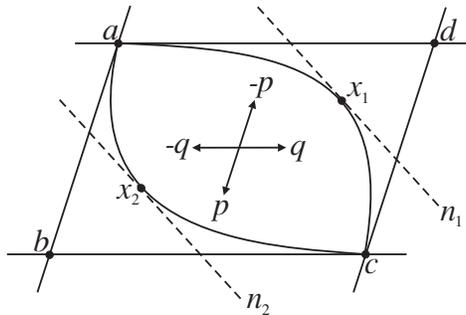


Figura 3.7:

Así queda por considerar el caso siguiente:

Caso 5: ninguno de los puntos b, c, d pertenece a M . Elegimos líneas soporte n_1, n_2 como en el caso 4. Además elegimos el punto c' situado en el interior del paralelogramo $abcd$ que es sostenido por cada uno de los vectores $-p, -q$ (véase figura 3.8). Si el lado $[a, b]$ tiene un segmento en común con $\text{bd } M$ entonces tomando un punto $a' \in [a, b] \cap \text{bd } M$ distinto de a . Cuando a' está suficientemente cerca de a entonces $\{a', c', x_1, x_2\}$ forman un sistema de detención primitivo para M en contradicción con la hipótesis. Así $[a, b] \cap \text{bd } M$ consiste del único punto a . Sin embargo si $[a, b] \cap \text{bd } M = \{a\}$ pero $x_1 \notin [c, d]$ entonces obtenemos un sistema de detención primitivo $\{a', c', x_1, x_2\}$ tomando un punto $a' \in \text{bd } M$ tal que la dirección del vector $a' - a$ está suficientemente cerca del vector $b - a$. Así es necesario que a y x_1 sean puntos estrictamente antipodales de M . Análogamente a y x_2 deben de ser puntos estrictamente antipodales de M . Los puntos x' y x_2 también son puntos estrictamente antipodales de M , esto es, M satisface la condición (i) de este teorema. ■

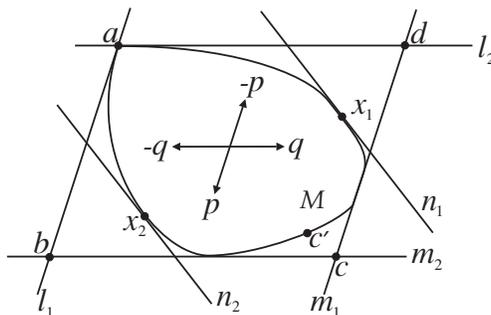


Figura 3.8:

Los dos teoremas anteriores nos dan la clasificación completa de los cuerpos compactos convexos $M \subset \mathbb{R}^2$ con respecto a la cardinalidad máxima de sus sistemas de detención primitivos (ya que $\sigma_{\text{máx}}(M) = 4$, si y sólo si, ninguno de los teoremas 3.1.1 y 3.1.2 tiene lugar).

EJEMPLO 3.1.1

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ el triángulo de Reauleaux. Ya que cada dos de sus vértices a, b, c son puntos estrictamente antipodales de M , aplicando el teorema 3.1.2 tenemos que $\sigma_{\text{máx}}(M) = 3$. Análogamente si $M \subset \mathbb{R}^2$ es un pentágono de Reauleaux entonces $\varrho_{\text{máx}}(M) = \sigma_{\text{máx}}(M) = 5$.

EJEMPLO 3.1.2

Sea $N \subset \mathbb{R}^2$ un semicírculo con diámetro $[a, m]$. Entonces por el teorema 3.1.2 tenemos que $\sigma_{\text{máx}}(M) = 3$. Sean ahora b un punto relativamente interior del segmento $[a, m]$ y l la línea a través de b que es perpendicular al diámetro $[a, m]$. Denotemos por Π el semiplano cerrado con frontera l que contiene al punto a y por M al conjunto $N \cap \Pi$. Entonces $\sigma_{\text{máx}}(M) = 4$ ya que el teorema 3.1.2 no es aplicable. En efecto para cada segmento contenido en bdM sus puntos extremos no son puntos estrictamente antipodales de M .

Los teoremas siguientes dan una subclasificación para dos familias interesantes de figuras planas.

TEOREMA 3.1.3

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una figura de ancho constante. Entonces

$$\sigma_{\text{máx}}(M) = \begin{cases} 3 & \text{si } M \text{ es el triángulo de Realeaux,} \\ 5 & \text{si } M \text{ es un pentágono de Realeaux,} \\ 4 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Demostración:

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una figura de ancho constante h . Si b y c son puntos antipodales de M entonces ellos son estrictamente antipodales y el segmento $[b, c]$ tiene longitud h . Luego sean a, p, q tres puntos frontera de M tales que a y p son puntos antipodales y a, q son puntos antipodales también. Entonces cada uno de los segmentos $[a, p]$, $[a, q]$ tiene longitud h y el arco frontera pq de M (que no contiene al punto a) es un arco circular de radio h . Ahora por el teorema 3.1.2 si $\sigma_{\text{máx}}(M) = 3$ entonces M es el triángulo de Realeaux, esto es, cada uno de los segmentos $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ (véase figura 2.17(a)) tiene longitud h y cada arco ab , bc , ca es un arco circular de radio h . Luego si $\sigma_{\text{máx}}(M) = 5$ y $P = \text{conv}\{a, b, c, d, e\}$ es un pentágono inscrito a M como en el teorema 3.1.1 entonces cada diagonal de P tiene longitud h y cada arco frontera ab , bc , cd , de , ea de M es un arco circular de radio h . Esto significa que M es un pentágono de Realeaux de ancho constante h (véase figura 2.17(b)). En los otros casos $\sigma_{\text{máx}}(M) = 4$. ■

Observemos que el teorema 3.1.3 puede ser obtenido de los teoremas 1.2.4 y 2.1.5.

TEOREMA 3.1.4

Sea M_k un polígono regular de k lados. Entonces

$$\sigma_{\text{máx}}(M_k) = \begin{cases} k & \text{para } k \leq 5, \\ 4 & \text{para } k > 5. \end{cases}$$

Demostración:

Sea $M_k \subset \mathbb{R}^2$ un polígono regular con k vértices tal que $\sigma_{\text{máx}}(M_k) = 5$ y sea $\{a, b, c, d, e\}$ un sistema de detención primitivo para M_k . Entonces por el lema 3.1.2 cada dos vértices no vecinos de $P = \text{conv}\{a, b, c, d, e\}$ son puntos frontera estrictamente antipodales de M_k .

Como a y d son puntos estrictamente antipodales de M_k el segmento $[a, d]$ es una diagonal principal de M_k . Análogamente $[b, d]$ también es una diagonal principal de M_k . Entonces a, b son vértices vecinos de M_k . Análogamente cada dos vértices vecinos de P son, al mismo tiempo, vértices vecinos de M_k . En consecuencia P coincide con M_k . Así $\sigma_{\text{máx}}(M_k) = 5$, si y sólo si, $k = 5$.

Además por el teorema 3.1.2 $\sigma_{\text{máx}}(M_k) = 3$, si y sólo si, $k = 3$. ■

- [1] B. Bollobás: Fixing systems for convex bodies. *Studia Sci. Math. Hungar.* 2 (1967), 351–354.
- [2] V. Boltyanski: The problem of illuminating the boundary of a convex body. *Bul. Izv. Akad. Nauk Moldav. SSR* 10(76) (1960), 77–84
- [3] V. Boltyanski: Helly’s theorem for H -convex sets. *Soviet. Math. Doklady* 17 (1976), no. 1, 78–81.
- [4] V. Boltyanski: Hindering systems for convex bodies. *Mat. Sb.* 188 (1997), no. 3-4, 327–339.
- [5] V. Boltyanski and H. González-Aguilar: Fixing and hindering systems of planar convex figures. *Dokl. Akad. Nauk* 381 (2001), no. 5, 590–592.
- [6] V. Boltyanski and H. González-Aguilar: Maximal primitive hindering systems for convex figures. *J. Combin. Theory Ser. A* 108 (2004), no. 2, 261–273.
- [7] V. Boltyanski and H. González-Aguilar: Maximal primitive fixing systems for convex figures. *Discrete geometry*, 85–102, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 253, Dekker, New York, 2003.
- [8] V. Boltyanski and H. Martini: Combinatorial geometry of belt bodies. *Results Math.* 28 (1995), 224–249.

-
- [9] V. Boltyanski and H. Martini: On maximal primitive fixing systems. *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 37 (1996), 199–207.
- [10] V. Boltyanski, H. Martini, P. Soltan: *Excursions into Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997. xiv + 419 pp.
- [11] V. Boltyanski and E. Morales Amaya: Minimal fixing systems for convex bodies. *Journal of Applied Analysis* 1 (1995), no. 1, 1–13.
- [12] V. Boltyanski and E. Morales Amaya: Cardinalities of primitive fixing systems for convex bodies. *Discrete and Computational Geometry* 24 (2000), no. 2-3, 209–218.
- [13] L. Danzer: Review 2942. *Math Reviews* 26 (1963), 569–570.
- [14] L. Fejes Tóth: On primitive polyhedra. *Acta Math. Sci. Hungar.* 13 (1962), 379–383.
- [15] S. Fudali: Fixing systems and homothetic covering. *Acta Math. Sci. Hungar.* 50 (3-4) (1987), 203–225.
- [16] B. Grünbaum: Fixing systems and inner illumination. *Acta Math. Sci. Hungar.* 15 (1964), 161–168.
- [17] P. Mani: On polytopes fixed by their vertices. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 22 (1971/72), 269–273.
- [18] B. Tomor: The fixing problem for convex figures. *Mat. Lapok* 14 (1963), 120–123.